MITTEILUNGEN

aus dem Institut für Geophysik und Meteorologie
der Universität zu Köln
Herausgeber : A. Ebel, F.M. Neubauer, P. Speth

Heft 79

Volker Steinbach

Numerische Experimente zur Konvektion in kompressiblen Medien

Köln 1991

ISSN 0069 - 5882

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Seitdem Bénard (1901) die ersten Experimente zur Konvektion durchgeführt hat und Lord Rayleigh (1916) die Theorie zur konvektiven Instabilität entwickelte, ist die Rayleigh-Bénard-Konvektion eines der meist beachteten und untersuchten hydrodynamischen Systeme überhaupt. Das lag wohl lange Zeit hauptsächlich daran, dass das Problem der thermischen Konvektion gerade in der Geophysik einen weiten Anwendungsbereich findet, der sich von Planeteninnern über Ozeane und Athmosphäre bis hin zu Strömungen in Sternen erstreckt. Es ist daher nicht erstaunlich, dass ausgerechnet der theoretische Meteorologe Edward Lorenz (1963) anhand eines stark vereinfachten Modells der Rayleigh-Bénard-Konvektion mit dem später nach ihm benannten Lorenz-Attraktor eine Entdeckung machte, die erst in den 70er Jahren von theoretischen Physikern und angewandten und experimentellen Mathematikern 'wiederentdeckt' wurde.

In dieser Zeit wurde die Theorie der nichtlinearen dynamischen Systeme entwickelt, die inzwischen viel zum Verständnis des lange ungeklärten Problems der Turbulenzentstehung beitragen konnte (Mayer, 1984). Seither ist die Rayleigh-Bénard-Konvektion wieder in den Brennpunkt des Interesses der theoretischen Physiker gerückt und der Lorenz-Attraktor eines der meist untersuchten Objekte der theoretischen Hydrodynamik geworden (z.B. McLaughlin und Martin, 1975, Yorke und Yorke, 1981).

Die erste Betrachtung des Erdmantels als hydrodynamisches System stammt von McKenzie et al. (1974). Anhand eines recht einfachen numerischen Modells gelang es diesen Autoren zu zeigen, dass eine enge Verbindung zwischen Plattentektonik und Mantelkonvektion wahrscheinlich ist. Seither ist die numerische Untersuchung von Konvektionsströmungen im Erdmantel zu einem festen Bestandteil der geophysikalischen Hydrodynamik geworden. Viele Aspekte der Physik des Erdmantels und ihre Auswirkungen auf Konvektionsströmungen wurden untersucht, z.B. die Bedeutung der Druck- und Temperaturabhängigkeit der Viskosität (Christensen, 1984).

Durch die oben angespochene rasche Entwicklung der nichtlinearen Dynamik wurde das Interesse der Geodynamiker auf die Zeitabhängigkeit der Mantelkonvektion gelenkt. Lange Zeit war es als unmöglich angesehen worden, dass Strömungen in Medien wie dem Erdmantel, die sich ja durch extrem niedrige Reynoldszahlen auszeichnen, periodischen oder gar chaotischen Charakter haben könnten. Es hat sich jedoch gezeigt, dass eine einzige Nichtlinearität in den Gleichungen, die ein dynamisches System beschreiben, ausreicht, um solch chaotisches Verhalten auszulösen. Die Untersuchung zeitabhängiger Phänomene ist daher zu einem festen Bestandteil des Arbeitsgebietes Mantelkonvektion geworden (z.B. Hansen und Ebel, 1988).

Fast alle oben angesprochenen numerischen Modelle haben gemeinsam, dass sie den Erdmantel als inkompressible Flüssigkeit behandeln, genauer gesagt, Dichtevariationen als rein temperaturbedingt ansehen und nur im Auftriebsterm der hydrodynamischen Grundgleichung berücksichtigen (Boussinesq-Approximation, s. Anhang A). Dabei ist schon seit langem bekannt, dass die Dichte des Erdmantels mit der Tiefe zunimmt, d. h. das Mantelmaterial als kompressibel angesehen werden muss. Diese von den meisten Autoren lange geübte Vernachlässigung der Kompressibilität hat meines Erachtens zwei Ursachen. Zunächst stellte Jeffreys (1930) in seiner frühen Untersuchung fest, dass sich, was Konvektion anbelangt, kompressible Medien ähnlich wie inkompressible verhalten, wenn man den Temperaturgradienten durch den superadiabatischen ersetzt. Damit waren inkompressible Modellrechnungen gerechtfertigt, wenn man nur die resultierenden Temperaturen als die superadiabatischen interpretierte.

Später veröffentlichten Jarvis und McKenzie (1980) eine ausführliche Studie über kompressible Konvektion unter Erdmantelbedingungen. Für Schichtdicken, die in etwa dem oberen Mantel entsprechen, konnte das Ergebnis von Jeffreys bestätigt werden. Für grössere Schichdicken, etwa dem gesamten Mantel entsprechend, fanden sie jedoch weitreichende Konsequenzen der Kompressibilität, z.B. Aufbrechen der Konvektionszellen mit Querverhältnis 1 in mehrere kleineren Querverhältnisses. Zu jener Zeit war die Dynamik des unteren Erdmantels nur insofern von Interesse, wie es den Wärmetransport aus dem Erdinnern und damit die thermische Geschichte der Erde betraf (Ausnahme : Ursprung der Hot-Spots, s. Kapitel 1). Hier zeigte die Arbeit von Jarvis und McKenzie, dass die Berücksichtigung der Kompressibilität nichts an den üblichen parametrischen Beziehungen zwischen Wärmetransport und Rayleighzahl ändert, die Modelle zur thermischen Erdgeschichte (z.B. Spohn und Schubert, 1982) mussten also nicht revidiert werden.

Mit der Weiterentwicklung der seismischen Tomographie wurde es in den 80er Jahren dann erstmals möglich, laterale Heterogenitäten im unteren Erdmantel (Dziewonski, 1984) und an der Kern-Mantel-Grenze (Creager und Jordan, 1986) festzustellen. Konsequenterweise wurde daraufhin auch der Dynamik des unteren Mantels und damit den Auswirkungen der Kompressiblität auf Konvektionsströmungen wieder mehr Interesse zuteil. Die Interpretation seismischer Daten einerseits (Anderson, 1987a) und Laborversuche unter extrem hohem Druck und hoher Temperatur andererseits (Chopelas und Boehler, 1989) haben jedoch gezeigt, dass die Variation einiger für die Hydrodynamik wichtiger thermodymischer Parameter im Erdmantel weitaus stärker ist als von Jarvis und McKenzie (1980) in ihrer Studie angenommen, so dass das von ihnen entworfene Bild von der Dynamik des unteren Mantels einer Revision bedarf.

Ziel dieser Arbeit ist eine solche Revision, die also die Auswirkungen der Variation der thermodynamischen Parameter auf Konvektionsströmungen unter Erdmantelbedingungen in den Vordergrund stellt. Dabei soll weniger Wert gelegt werden auf eine möglichst exakte Modellierung des Erdmantels (Berücksichtigung variabler Viskosität, interner Wärmequellen etc.). Vielmehr sollen die grundlegenden physikalischen Mechanismen, die die Strömungsdynamik in solchen Medien prägen, mittels einer weiten Variation einiger Modellparameter untersucht werden. Der Bezug zum Erdmantel wird daher wird daher in den folgenden numerischen Experimenten oft nur darin bestehen, dass die Form der Tiefenabhängigkeit der thermodynamischen Parameter die gleiche ist, während ihr Grad meist unter- oder oberhalb des für den Erdmantel anzunehmenden liegen wird.

In Kapitel 1 soll zunächst ein kurzer Überblick über den aktuellen Stand der Erforschung der Mantelkonvektion gegeben werden. In Kapitel 2 folgt dann eine kurze Einführung in die Problematik kompressibler Konvektion. Die technischen und theoretischen Aspekte der numerischen Simulation von kompressiblen Konvektionsströmungen werden in Kapitel 3 behandelt. Hier werden die hydrodynamischen Grundgleichungen und einige zu ihrer Behandlung notwendige Näherungen bzw. Einschränkungen vorgestellt. Die exakte mathematische Formulierung der schliesslich im numerischen Modell verwendeten Gleichungen wird in Anhang A gegeben. Darüber hinaus wird die numerische Behandlung der Gleichungen kurz umrissen und die Wahl der thermodynamischen Modellparameter erläutert.

Die Bedeutung der Erbebnisse der linearen Theorie, die Aussagen über das Einsetzen von Konvektionsströmungen macht, wird meines Erachtens nach oft unterschätzt. Für inkompressible Flüssigkeiten kann ihre Aussagekraft tatsächlich nicht allzu hoch bewertet werden, da sich z. B. das Querverhältnis der Strömung mit wachsender Rayleighzahl stark verändern kann. Für kompressible Medien liefert die lineare Theorie jedoch wesentlich mehr Information, da hier viele Modellparameter von der Tiefe abhängen und diese Tiefenabhängigkeit auch für hohe Rayleighzahlen, d. h. im stark nichtlinearen Bereich, bestehen bleibt. Daher werden die Aussagen der linearen Theorie ausführlich in Kapitel 4 präsentiert.

Wie weiter oben erwähnt, sollen einige Modellparameter über einen möglichst weiten Bereich variiert werden. Um eine solch breit angelegte Studie überhaupt möglich zu machen, müssen einige durchaus wichtige Aspekte vernachlässigt werden. Hier ist vor allem die Zeitabhängigkeit von Konvektionsströmungen zu nennen. Sie bringt zwar keine grundlegenden numerischen Probleme mit sich, aber der Bedarf an Rechenzeit und Plattenplatz sowie der aufgrund der grossen Datenmengen benötigte Aufwand der Dateninterpretation macht die systematische Untersuchung eines weiten Parameterbereichs unmöglich. Der Schwerpunkt dieser Arbeit wird daher auf der Modellierung stationärer Strömungen liegen (Kapitel 5) und die Untersuchung zeitabhängiger Strömungen auf einige Beispielfälle beschränkt bleiben (Kapitel 6).

1 Zum Stand der Forschung in der Mantelkonvektion

Das anfängliche Bild von den im Mantel herrschenden Konvektionsströmungen bestand im wesentlichen aus stationären Kovektionswalzen, wobei die Aufströme mit den mittelozeanischen Rücken und die Abströme mit den Subduktionszonen identifiziert wurden. Geologische, geochemische und geophysikalische Befunde führten jedoch rasch dazu, dass diese ursprünglichen Vorstellungen revidiert werden mussten. An die Stelle der stationären Konvektionswalzen, die entweder den gesamten Erdmantel umfassen oder aber getrennt im oberen und unteren Erdmantel auftreten, ist ein äusserst komplexes Bild der Vorgänge im Erdmantel getreten, das im folgenden kurz skizziert werden soll.

Eine wesentliche neue Erkenntnis ist die, dass Mantelkonvektion kein stationärer, sondern zeitabhängiger, evtl. sogar chaotischer Prozess ist. Berücksichtigt man diese Zeitabhängigkeit, so ist es zumindest prinzipiell möglich, das Nebeneinander grossräumiger Skalen, verbunden mit der Bewegung der Platten, und kleinräumigen Erscheinungen wie Hot Spots zu erklären (Hansen und Ebel, 1988). Bei Vergleichen von numerischen Konvektionsmodellen und geologischen Strukturen an der Erdoberfläche muss man allerdings beachten, dass in numerischen Modellen in der Regel die völlig unterschiedliche Rheologie von Lithosphäre und Mantel nicht berücksichtigt werden kann. Brüche und Faltungen, die besonders an den Grenzen der Lithosphärenplatten konzentriert sind, lassen typische Strukturen wie Transformstörungen und Subduktionszonen entstehen, die nicht einfache Folge der thermischen Konvektion sind.

Eine isolierte Rolle spielen in diesem Zusammenhang die Kontinente. Aufgrund ihrer (chemisch bedingten) geringeren Dichte können sie sich der (thermisch bedingten) Subduktion widersetzen und nehmen daher nicht am plattentektonischen Zyklus teil. Ihr Einfluss auf die Mantelkonvektion wurde bisher nur in einfachen, nicht selbstkonsistenten Modellen untersucht (Gurnis, 1988).

Die Physik des oberen Erdmantels wird durch zahlreiche hier auftretende Phasenübergänge geprägt (Anderson, 1987b). Besondere Bedeutung kommt den isobaren Phasenübergängen zu, die aufgrund lateraler Temperaturgadienten auftreten. Die mit ihnen verbundenen Änderungen der physikalischen Parameter sind in der Regel grösser als die rein durch die Temperaturdifferenzen induzierten und müssen daher bei der Interpretation seismischer Daten besoders berücksichtigt werden. Doch auch für hydrodynamische Vorgänge sind sie möglicherweise von grosser Bedeutung, da sie räumlich eng begrenzte konvektive Instabilitäten hervorrufen können, die eine mögliche Quelle für 'hot spots' darstellen. Erste Versuche zur numerischen Modellierung dieser Phasenübergänge scheinen diese Vermutung zu bestätigen, wobei sich ein enger Zusammenhang mit der Form der Konvektion im unteren Mantel abzeichnet (Yuen, pers. Mitteilung).

Grosse Bedeutung für die Mantelkonvektion hat die Natur der Übergangszone zwischen oberem und unterem Mantel in etwa 600 bis 670 km Tiefe. Bis heute ist unklar, ob die seismische 670-km-Diskontinuität lediglich Ausdruck des Phasenübergangs Spinel-Perovskit ist oder ob sich oberer und unterer Mantel zusätzlich in ihrer chemischen Zusammensetzung unterscheiden. Für die Geodynamik ist damit die Frage verbunden, ob diese Grenze die Mantelkonvektion in zwei Stockwerke, nämlich den oberen und unteren Erdmantel trennt. Ein chemisch bedingter Anstieg der Dichte im unteren Erdmantel, verursacht etwa durch einen Anstieg des Eisengehaltes (Jeanloz und Knittle, 1989) könnte den thermischen Auftrieb überkompensieren und so geschichtete Konvektionsströmungen herbeiführen. Christensen und Yuen (1984) haben gezeigt, dass ein Dichtekontrast von ca. 5 % für eine dauerhafte Trennung ausreicht und dass auf der anderen Seite ein Kontrast von nur 1,5 % keine Barriere für die Konvektionsströme darstellt.

Geochemische Befunde, die zunächst auf die Existenz chemisch verschiedener Reservoirs im oberen und unteren Erdmantel hinwiesen, (O'Nions et al., 1979), werden heute in Frage gestellt. Es scheint möglich, dass auch in einem mantelweiten Konvektionssystem chemische Inhomogeneitäten lange Zeit bestehen und so die unterschiedliche Zusammensetzung von Basalten erklären können. Auf der anderen Seite weisen die geochemischen Modelle darauf hin, dass die 'Zykluszeit' der ozeanischen Basalte, d. h. die Zeitspanne zwischen der Entstehung der ozeanischen Kruste und ihrem Wiederauftauchen bei nur 2 Gyr liegt. Abschätzungen für Gesamtmantelkonvektion ergeben Zykluszeiten von $>$ 5 Gyr, was somit gegen eine Beteiligung des des unteren Erdmantels am plattentektonischen Zyklus spricht. Allerdings ist es wahrscheinlich, dass die Mantelkonvektion in der Vergangenheit wesentlich schneller ablief und darüber hinaus ist es denkbar, dass eine dreidimensionale zeitabhängige Gesamtmantelkonvektion subduzierte Lithospäre im Zeitintervall von 2 Gyr an die Stellen der ozeanischen Rücken zurücktransportiert und dabei den grössten Teil des Mantels unberührt lässt (Silver et al, 1988). Als eindeutiger Hinweis auf geschichtete Konvektion können daher die geochemischen Befunde nicht gewertet werden.

Auch die seismologischen Studien an subduzierter Lithospäre liefern kein klares Bild. Nach Creager und Jordan (1984) taucht subduzierte Lithosphäre in den unteren Erdmantel ein, doch werden gerade heute diese Resultate kontrovers diskutiert (Zhou et al., 1990).

In ihrem Übersichtsartikel fassen Olson et al. (1990) das heutige Bild wie folgt zusammen : 'Hinweise aus Seismologie, Isotopengeochemie Hochdruckphysik und Hydrodynamik zeigen, dass oberer und unterer Mantel nicht völlig getrennt sind, dass sich aber der Stil der Konvektion mit der Tiefe ändert'.

Sind im oberen Mantel und in der Übergangszone vor allem Phasenübergänge für diese Änderung des Konvektionsstils verantwortlich, so stellt sich der untere Mantel nach bisherigen Erkenntnissen als relativ homogenes Medium dar. Allerdings haben in jüngster Zeit die Auswertung seismischer Daten einerseits (Anderson, 1987a) und und Hochdruckund Temperaturmessungen andererseits (Chopelas und Boehler, 1989, Anderson et al., 1990) gezeigt, dass der thermische Ausdehnungskoeffizient im unteren Mantel stärker mit der Tiefe abnimmt als bisher angenommen. Zusammen mit der starken Zunahme der Wärmeleitfähigkeit (Anderson, 1987a, Ross et al., 1984) ergeben sich hieraus wichtige Konsequenzen für den Konvektionsstil im unteren Mantel, die in dieser Arbeit untersucht werden sollen. Der Grad der Variation der thermodynamischen Parameter mit der Tiefe ist zwar noch Gegenstand der Diskussion, die Variation an sich aber unumstitten. Dennoch scheint die Bedeutung dieser Befunde von einigen Autoren, die sich mit der Modellierung kompressibler Konvektionströmungen beschäftigen, unterschätzt zu werden, da sie in vielen Arbeiten vollkommen unberücksichtigt bleiben (z. B. Machetel und Yuen, 1989, Schmeling, 1989). Ausnahmen bilden z. B. Yuen und Zhang (1989), Steinbach et al. (1989) und Leitch et al. (1991).

Neben der besonderen Rolle des oberen Mantels für die Geodynamik hat gerade in jüngster Zeit auch die Grenze zwischen Erdkern und -mantel die Aufmerksamkeit auf sich gezogen. In dieser Grenzschicht, in ca. 2900 km Tiefe , müssen festes Mantelmaterial und das flüssige Material des äusseren Kerns koexistieren. Ein erheblicher Temperaturanstieg über eine dünne Schicht hinweg scheint nötig, um die Geotherme im unteren Erdmantel und äusseren Erdkern zu verbinden (Olson et al., 1990). Seismologische Untersuchungen weisen auf die Besonderheit dieser 100-300 km mächtigen, als D"-Schicht bekannte Region am Grunde des Erdmantels hin. Neben der bekannten 'low velocity zone' in 50-150 km Tiefe weist nur noch diese D"-Schicht anomal niedrige Geschwindigkeitsgradienten auf. Darüber hinaus wurden in dieser Schicht Heterogenitäten über ein weites Spektrum, von einigen hundert km bis hin zu Undulationen von 10,000 km gefunden (Lay, 1988, Olson et al., 1990). Diese Beobachtungen sind kaum mit der Vorstellung einer thermischen Grenzschicht (d. h. mit einer Grenzschicht wie sie in rein thermischer Konvektion entstehen würde) in Einklang zu bringen. Es scheint dagegen notwendig, chemisch bedingte Dichtedifferenzen in der D"-Schicht anzunehmen (etwa Anreicherung an Eisen), um sowohl die Heterogenitäten wie auch den stark superadiatischen Temperaturgradienten erklären zu können (Hansen und Yuen, 1988). Die Variation der thermodynamischen Parameter ist auch in diesem Zusammenhang von Bedeutung, da hier thermische und chemische Auftriebskräfte zusammenwirken und sowohl die Verteilung einer chemisch unterschiedlichen Komponente als auch die Topographie der Kern-Mantel-Grenze beeinflussen.

2 Einführung in die Konvektion kompressibler Medien

Mit dem Begriff 'Rayleigh-Bénard-Konvektion' wird das folgende hydrodynamische Problem bezeichnet : Eine ebene Flüssigkeitsschicht im Schwerefeld wird an der Oberfläche auf einer konstanten Temperatur $\mathrm{T_0}$ gehalten, an der Unterseite auf einer ebenfalls konstanten, aber höheren Temperatur $\mathrm{T_1 = T_0 + \triangle T}$. Für das Verhalten dieses Systems sind die folgenden Prozesse von Bedeutung : Einerseits entsteht durch laterale Temperaturgradieten Auftrieb, der vertikale Strömungen antreibt, andererseits werden diese Temperaturdifferenzen durch Wärmeleitung abgebaut und die Strömungen durch viskose Reibung gebremst. Als Mass für die Stärke der antreibenden Kräfte dient der dimensionslose Ähnlichkeitsparameter 'Rayleighzahl' :

$$\mathrm{Ra} = \frac{\alpha \mathrm{g} \triangle \mathrm{T} \mathrm{d}^3}{\kappa \nu}.$$

Hier bezeichnen α den thermischen Ausdehnungskoeffizienten, g die Schwerebeschleinigung, $\triangle\mathrm{T}$ die Temperaturdifferenz zwischen Unter- und Oberseite der Schicht, d die Schichtdicke, κ die Temperaturleitfähigkeit oder thermische Diffusivität und ν die kinematische Viskosität.

Während die Rayleighzahl in inkompressiblen Flüssigkeiten der einzige auftretende Ähnlichkeitsparameter ist, muss bei kompressiblen Strömungen die Zunahme der Temperatur mit der Tiefe aufgrund adiabatischer Kompression ebenso berücksichtigt werdem wie die Abhängigkeit der Dichte vom - in erster Näherung - hydrostatischen Druck. Der adiabatische Temperaturgradient lautet :

$$\left(\frac{1}{\mathrm{T}}\frac{\mathrm{dT}}{\mathrm{dz}}\right)_{\mathrm{s}} = -\frac{\alpha \mathrm{g}}{\mathrm{C_p}}, \tag{2.1}$$

während die Dichtezunahme bei adiabatischer Temperatur und hydrostatischem Druck durch

$$\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{dz}} = -\frac{\rho \mathrm{g}}{\mathrm{K_s}} \tag{2.2}$$

gegeben ist. Hier bezeichnet $\mathrm{C_p}$ die spezifische Wärme bei konstantem Druck und $\mathrm{K_s}$ den adiabatischen Kompressionsmodul. Man kann die rechten Seiten von (2.1) und (2.2) als Kehrwerte von Skalenhöhen für Dichte und Temperatur auffassen :

$$H_\rho = \frac{K_s}{\rho g} \text{ und } H_T = \frac{C_p}{\alpha g}.$$

Normiert man die Vertikalkoordinate auf die Schichtdicke d und führt man den thermodynamischen Grüneisenparameter γ mit

$$\gamma = \frac{\alpha K_s}{\rho C_p}$$

ein, so lassen sich die beiden neuen Ähnlichkeitsparameter

$$D = \frac{d}{H_T} = \frac{\alpha g d}{C_p} \qquad \text{Dissipationszahl}$$

und

$$\frac{D}{\gamma} = \frac{d}{H_\rho} = \frac{\rho g d}{K_s}$$

definieren, die neben der Rayleighzahl eine kompressible Konvektionsströmung beschreiben. Da adiabatische Erwärmungs- und Abkühlungsrate proportional zur absoluten Temperatur sind, tritt der Wert der Oberflächentemperatur als weiterer Parameter dazu.

Ist die Schichtdicke klein gegenüber den Skalenhöhen von Dichte und adiabatischer Temperatur, so können die neuen Ähnlichkeitsparameter als kleine Grössen angesehen werden und es resultiert die Boussinesq-Approximation, die für die meisten Flüssigkeiten unter Laborbedingungen Anwendung findet (Normand et al., 1977). Betrachtet man jedoch Konvektion im Erdmantel oder innerhalb der Venus, so stellt man fest, dass aufgrund der grossen Schichtdicken (ca. 3000 km) die Zunahme der Dichte und der adiabatischen Temperatur durchaus nicht vernachlässigt werden kann. Eine Abschätzung der Dissipationszahl für den gesamten Erdmantel ergibt $D \approx 0.5$.

Den Einfluss der Kompressibilität auf die Stabilität einer Flüssigkeitsschicht kann man sich veranschaulichen, indem man ein Flüssigkeitspaket betrachtet, das aus seiner Ruhelage um einen kleinen Betrag nach oben verschoben wird. Aufgrund des vertikalen Temperaturgradienten ist die Temperatur seiner Umgebung hier geringer, das Paket wird also Auftrieb erfahren. Ist der Auftrieb stärker als die Kraft der Prozesse, die Konvektion verhindern (Wärmeleitung und viskose Reibung, s. o.), so wird Konvektion einsetzen. In einer kompressiblen Flüssigkeit wird die Temperaturdifferenz zwischen dem Flüssigkeitspaket und seiner Umgebung dadurch vermindert, dass sich das Paket ausdehnt und damit abkühlt. Es ist also klar, dass in einem kompressiblen Medium Konvektion erst bei höheren Rayleighzahlen einsetzen wird. Ersetzt man in der Rayleighzahl dieTemperaturdifferenz durch die superadiabatische Temperaturdifferenz, so sind die kritischen Rayleighzahlen für das Einsetzen der Konvektion in kompressiblen und inkompressiblen

Flüssigkeiten gleich (Jeffreys, 1930). Dies gilt jedoch strenggenommen nur für mit der Tiefe konstante adiabatische Temperaturgradienten. Variiert der adiabatische Temperaturgradient mit der Tiefe, so hängt auch die kritische Rayleighzahl von der Tiefe ab und die Verhältnisse werden wesenlich komplizierter (s. Kapitel 4).

Die Überlegungen, die im letzten Absatz gemacht wurden, betreffen nur die Frage nach der Stabilität der Flüssigkeitsschicht. In kräftig konvektierenden Medien, d. h. bei hoher superkritischer Rayleighzahl können die Auswirkungen der Kompressibilität a priori nicht so einfach abgeschätzt werden. Bei Medien wie dem Erdmantel kommt noch erschwerend hinzu, dass alle oben eingeführten Ähnlichkeitsparameter von der Tiefe abhängen, sodass die dynamischen Konsequenzen der Kompressibilität mit geeigneten Methoden (hier : numerische Simulation) untersucht werden müssen.

3 Theoretische Grundlagen

3.1 Mathematische Formulierung

Die Prinzipien der Erhaltung von Masse, Impuls und Energie für eine Newtonsche Flüssigkeit im Schwerefeld werden durch die folgenden hydrodynamischen Grundgleichungen ausgedrückt :

$$\frac{\partial \rho}{\partial \mathrm{t}} + \mathrm{div}\,(\rho \underline{\mathrm{v}}) = 0 \qquad 3.1.1$$

3.2 Wahl der Modellparameter

Modell	ρ/ρ_0	α/α_0	γ/γ_0	λ/λ_0
A 1	$(1 + 2.5\mathrm{D}_0/\gamma_0\,(1-\mathrm{z}))^{2/5}$	$(\rho/\rho_0)^{-3.5}$	$(\rho/\rho_0)^{-1}$	1
A 2	"	"	"	$(\rho/\rho_0)^3$
B 1	"	$(\rho/\rho_0)^{-6.5}$	$(\rho/\rho_0)^{-4}$	1
B 2	"	"	"	$(\rho/\rho_0)^6$
JM	$\exp\,(\mathrm{D}_0/\gamma_0\,(1-\mathrm{z}))$	1	1	1

Tabelle 3.1 : In den einzelnen Modellen verwendete Tiefenabhängigkeit von Dichte (ρ) , thermischem Ausdehnungskoeffizienten (α), Grueneisenparameter (γ) und Temperaturleitfähigkeit (λ). In den Modellen A und B wurde $\gamma_0 = 1.5$ verwendet, JM bezeichnet das Modell von Jarvis und McKenzie (1980).

3.3 Numerische Methode

Die Gleichungen (3.1.5)-(3.1.7)

$$\hat{\mathrm{L}}\psi = \omega \qquad 3.1.5$$

$$\hat{\mathrm{L}}\omega = \alpha \mathrm{Ra}_0 \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \mathrm{x}} + \frac{4}{3}\left(\frac{\alpha \mathrm{D}_0}{\rho\gamma\gamma_0}\right)^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \mathrm{x}^2} \qquad 3.1.6$$

$$\rho\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \mathrm{t}} + \frac{\partial \psi}{\partial \mathrm{z}}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \mathrm{x}} - \frac{\partial \psi}{\partial \mathrm{x}}\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \mathrm{z}} + \alpha \mathrm{D}_0 \left(\mathrm{T}_0 + \mathrm{T}\right)\right) - \mathrm{div}\left(\lambda \mathrm{grad} \mathrm{T}\right) = \rho\frac{\mathrm{Ra}_\mathrm{Q}}{\mathrm{Ra}_0} + \frac{\mathrm{D}_0}{\mathrm{Ra}_0 \rho^2}\Phi \quad 3.1.7$$

wurden mit Hilfe der Methode der finiten Elemente gelöst, und zwar auf einem rechteckigen Grundgebiet ($0 \leq \mathrm{x} \leq \mathrm{a}\,,\ 0 \leq \mathrm{z} \leq 1$) unter den Randbedingungen

$$\mathrm{T} = 1 \quad \text{für} \quad \mathrm{z} = 0$$
$$\mathrm{T} = 0 \quad \text{für} \quad \mathrm{z} = 1$$

$$\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \mathrm{x}} = 0 \quad \text{für} \quad \mathrm{x} = 0, \mathrm{a}$$

$$\psi = \omega = 0 \quad \text{für} \quad \mathrm{x} = 0, \mathrm{a} \text{ und } \mathrm{z} = 0, 1.$$

Physikalisch bedeuten diese Randbedingungen isotherme Ober- und Unterseiten, isolierende seitliche Begrenzungen und scherspannungsfreies Gleiten auf allen Rändern.

Die Lösung von (3.1.5) und (3.1.6) laßst sich aq̈uivalent als Lösung eines Variationsprinzips formulieren, während (3.1.7) mit Hilfe des Petrov-Galerkin-Verfahrens gelöst wird. Genaue Beschreibungen der Methode der Finiten Elemente und ihre Anwendung auf physikalische Fragestellungen findet man z. B. bei Zienkiewicz (1977) und Schwarz (1980). Hier soll nur erwähnt werden, dass eine Näherungslösung von (3.1.5) – (3.1.7) mit dem Ansatz

$$\widetilde{\mathrm{T}}\left(\mathrm{x}, \mathrm{z}\right) = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{N}_\mathrm{i}\left(\mathrm{x}, \mathrm{z}\right) \mathrm{T}_\mathrm{i}$$

$$\widetilde{\psi}\left(\mathrm{x}, \mathrm{z}\right) = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{m}} \mathrm{M}_\mathrm{i}\left(\mathrm{x}, \mathrm{z}\right) \psi_\mathrm{i}$$

$$\widetilde{\omega}\left(\mathrm{x}, \mathrm{z}\right) = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{m}} \mathrm{M}_\mathrm{i}\left(\mathrm{x}, \mathrm{z}\right) \omega_\mathrm{i}$$

gesucht wird, wobei T_i, ψ_i und ω_i die Funktionswerte der Näherungslösung an diskreten Gitterpunkten und M_i und N_i geeignete Formfunktionen darstellen. Mit diesem Ansatz läuft die Lösung des Variationsprinzips sowie die Anwendung des Petrov-Galerkin-Verfahrens auf die Lösung der folgenden Gleichungssysteme hinaus :

$$\underline{\underline{\mathrm{S}}} \cdot \underline{\psi} = \underline{\mathrm{f}}\left(\underline{\omega}\right) \qquad 3.3.1$$

$$\underline{\underline{\mathrm{S}}} \cdot \underline{\omega} = \underline{\mathrm{g}}\left(\underline{\psi}, \underline{\mathrm{T}}\right) \qquad 3.3.2$$

$$\underline{\underline{\mathrm{A}}} \cdot \underline{\underline{\dot{\mathrm{T}}}} + \underline{\underline{\mathrm{B}}}\left(\underline{\psi}\right) \cdot \underline{\mathrm{T}} = \underline{\mathrm{h}}\left(\underline{\psi}\right) \qquad 3.3.3$$

Die Tilden wurden der Übersichtlichkeit halber weggelassen. Hier bezeichnen $\underline{\mathrm{T}}$, $\underline{\psi}$ und $\underline{\omega}$ die Vektoren der Knotenvariablen, die auftretenden Matrizen und Vektoren sehen wie folgt aus :

$$\mathrm{A_{ij}} = \int\limits_{\mathrm{G}} \mathrm{N_i G_j dxdz}$$

$$\mathrm{S_{ij}} = \int\limits_{\mathrm{G}} \rho^{-1} \left(\frac{\partial \mathrm{M_i}}{\partial \mathrm{x}} \frac{\partial \mathrm{M_j}}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial \mathrm{M_i}}{\partial \mathrm{z}} \frac{\partial \mathrm{M_j}}{\partial \mathrm{z}} \right) \mathrm{dxdz}$$

$$\mathrm{B_{ij}} = \int\limits_{\mathrm{G}} \mathrm{G_j} \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial \mathrm{z}} \frac{\partial \mathrm{N_i}}{\partial \mathrm{x}} - \frac{\partial \psi}{\partial \mathrm{x}} \left(\frac{\partial \mathrm{N_i}}{\partial \mathrm{z}} + \alpha \mathrm{D_0} \left(\mathrm{T_0} + \mathrm{N_i}\right) \right) \right\} \mathrm{dxdz} + \int\limits_{\mathrm{G}} \lambda \left(\frac{\partial \mathrm{G_j}}{\partial \mathrm{x}} \frac{\partial \mathrm{N_i}}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial \mathrm{G_j}}{\partial \mathrm{z}} \frac{\partial \mathrm{N_i}}{\partial \mathrm{z}} \right) \mathrm{dxdz}$$

$$\mathrm{f_j} = -\int\limits_{\mathrm{G}} \omega \mathrm{M_j dxdz}$$

$$\mathrm{g_j} = -\int\limits_{\mathrm{G}} \left\{ \alpha \mathrm{Ra_0} \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \mathrm{x}} + \frac{4}{3} \frac{\alpha \mathrm{D_0^2}}{\gamma \gamma_0 \rho} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \mathrm{x}^2} \right\} \mathrm{M_j dxdz}$$

$$\mathrm{h_j} = \int\limits_{\mathrm{G}} \left\{ \rho \frac{\mathrm{Ra_Q}}{\mathrm{Ra_0}} \mathrm{G_j} + \frac{\mathrm{D_0}}{\mathrm{Ra_0} \rho^2} \Phi \mathrm{G_j} \right\} \mathrm{dxdz}$$

Zur Wahrung der Stetigkeitsanforderungen (Zienkiewicz, 1977) wurden als Formfunktionen des Temperaturproblems bilineare, für Stromfunktion und Vorticity quadratische Funktionen der Serendipity-Klasse gewählt.

Die $\mathrm{G_j}$ sind die nach dem 'upwind'-Verfahren von Heinrich et al. (1977) ermittelten Gewichtsfunktionen (s. auch Hansen, 1983). Zur Lösung der Differentialgleichung 3.3.3 wird ein Prädiktor-Korrektor-Verfahren zweiter Ordnung verwendet, das bei Hansen (1987) beschrieben ist. Aus der Schreibweise von 3.3.1 - 3.3.3 geht hervor, dass für ein gegebenes Temperaturfeld die Lösung von 3.3.1 und 3.3.2 iterativ erfolgen muss, da die rechte Seite von 3.3.2 von der Stromfunktion abhängt.

Sucht man stationäre Lösungen von (3.1.5) – (3.1.7), so kann der Term $\underline{\underline{A}} \cdot \dot{\underline{T}}$ in 3.3.3 gestrichen werden. Existierende Lösungen erhält man dann durch ein iteratives Unterrelaxationsverfahren, das ebenfalls von Hansen (1983) beschrieben wird.

4 Der lineare Bereich : Einsetzen der Konvektion

Eine Lösung der hydrodynamischen Grundgleichungen ist stets der Zustand der Wärmeleitung, in dem sich die Flüssigkeit in Ruhe befindet. Dieser Zustand wird dann instabil, wenn die Rayleighzahl einen kritischen Wert überschreitet, d. h. die durch die Temperaturvariationen bedingten Auftriebskräfte die Reibungskräfte und die ausgleichende Wirkung der Wärmeleitung übersteigen. Mit Hilfe einer linearen Stabilitätsanalyse soll in diesem Kapitel für die in Kapitel (3.2) eingeführten Modelle die Abhängigkeit dieser kritischen Rayleighzahl von der Oberflächentemperatur und der Dissipationszahl untersucht werden. Auch lassen sich Aussagen über die Geometrie der einsetzenden Strömungen gewinnen, die jedoch aufgrund der Linearität des Ansatzes nur für schwach superkritische Rayleighzahlen gelten und nur bedingt auf kräftige Strömungen mit hoher superkritischer Rayleighzahl übertragen werden können. Inwieweit dies möglich ist, soll in den folgenden Kapiteln erörtert werden. Die Kenntnis der kritischen Rayleighzahl eines hydrodynamischen Systems ist insofern von Bedeutung, als dass wichtige Eigenschaften einer Strömung wie etwa Effektivität des konvektiven Wärmetransports entscheidend vom Verhältnis $\mathrm{Ra}/\mathrm{Ra_c}$ abhängen.

Die triviale Lösung der Gleichungen (3.1.5) – (3.1.7)

$$\hat{\mathrm{L}}\psi = \omega \qquad 3.1.5$$

$$\hat{\mathrm{L}}\omega = \alpha \mathrm{Ra}_0 \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \mathrm{x}} + \frac{4}{3}\left(\frac{\mathrm{D}_0\alpha}{\gamma_0\gamma\rho}\right)^2 \frac{\partial^2\psi}{\partial \mathrm{x}^2} \qquad 3.1.6$$

$$\rho\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \mathrm{t}} + \frac{\partial\psi}{\partial \mathrm{z}}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \mathrm{x}} - \frac{\partial\psi}{\partial \mathrm{x}}\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \mathrm{z}} + \alpha \mathrm{D}_0\left(\mathrm{T}_0 + \mathrm{T}\right)\right) - \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}\lambda\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \mathrm{x}} - \frac{\partial}{\partial \mathrm{z}}\lambda\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \mathrm{z}} = \frac{\mathrm{D}_0}{\mathrm{Ra}_0\rho^2}\Phi \qquad 3.1.7$$

ist der Fall der Wärmeleitung (der Index c steht für engl. 'conductive') :

$$\psi_\mathrm{c} = \omega_\mathrm{c} = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dz}}\left(\lambda\frac{\mathrm{dT_c}}{\mathrm{dz}}\right) = 0,\ \mathrm{T_c}(0) = 1,\ \mathrm{T_c}(1) = 0.$$

Betrachtet man kleine Störungen des Wärmeletungszustandes

$$\psi = \psi_c + \widetilde{\psi},\ \omega = \omega_c + \widetilde{\omega},\ T = T_c + \widetilde{T},$$

so lassen sich (3.1.5) – (3.1.7) linearisieren. Die in den Störungen linearen Gleichungen lauten dann (der Lesbarkeit halber werden hier die Tilden sofort wieder weggelassen) :

$$\hat{L}\psi - \omega = 0 \tag{4.1}$$

$$\hat{L}\omega - \alpha Ra_0 \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{4}{3}\left(\frac{D_0\alpha}{\gamma_0\gamma\rho}\right)^2 \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = 0 \tag{4.2}$$

$$\rho\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\left(\frac{dT_c}{dz} + \alpha D_0\left(T_0 + T_c\right)\right) - \frac{\partial}{\partial x}\lambda\frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial z}\lambda\frac{\partial T}{\partial z} = 0 \tag{4.3}$$

die Randbedingungen für isotherme freie Oberflächen :

$$T = \psi = \omega = 0.$$

Mit dem Ansatz

$$A\left(x, z, t\right) = A^*\left(z\right)\exp\left(ikx + \sigma t\right) \tag{4.4}$$

für die Variablen T, ψ und ω in einer horizontal unendlich ausgedehnten Flüssigkeit lassen sich (4.1 – 4.3) in ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen für die komplexen Störungamplituden überführen (die Kennzeichnung der Amplituden durch den hochgestellten Stern wird wiederum der Einfachheit halber fortgelassen) :

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{\rho}\frac{d\psi}{dz}\right) - \frac{k^2}{\rho}\psi - \omega = 0, \tag{4.5}$$

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{\rho}\frac{d\omega}{dz}\right) - \frac{k^2}{\rho}\omega - ik\alpha Ra_0 T + \frac{4}{3}k^2 r^2\psi = 0, \tag{4.6}$$

$$\sigma\rho T + k^2\lambda T - \frac{d}{dz}\left(\lambda\frac{dT}{dz}\right) + ikT'_{sa}\psi = 0, \tag{4.7}$$

$$T'_{sa} = -\frac{dT_c}{dz} - \alpha D_0\left(T_0 + T_c\right), \quad r^2 = \left(\frac{D_0\alpha}{\gamma_0\gamma\rho}\right)^2.$$

Die Grösse σ ist in (4.4) als komplexe Wachstumsrate der Störungen definiert. Für $\mathrm{Re}\,(\sigma) < 0$ werden die Störungen gedämpft, der Wärmeleitungszustand ist stabil, während sie für $\mathrm{Re}\,(\sigma) > 0$ anwachsen und damit Konvektion einsetzt. $\mathrm{Im}\,(\sigma)$ entscheidet darüber, ob die einsetzende Strömung stationär ist ($\mathrm{Im}\,(\sigma) = 0$, 'exchange of stablities') oder oszillatorisch ($\mathrm{Im}\,(\sigma) \neq 0$, 'overstability').

In der Boussinesq-Approximation kann man zeigen, dass der Imaginärteil von σ für positive Rayleighzahlen verschwindet, also Konvektion immer als stationäre Strömung einsetzt (Chandrasekhar, 1961). In der anelastisch-liquiden Näherung sind prinzipiell komplexe Wachstumsraten möglich. Jarvis und McKenzie (1980) haben solche auch für subkritische Rayleighzahlen ($\mathrm{Re}\,(\sigma) < 0$) gefunden, jedoch verschwanden die Imaginärteile für $\mathrm{Re}\,(\sigma) \to 0$ und Konvektion setzte immer als stationärer Zustand ein.

In der Meteorologie und Ozeanographie sind solche Schwingungen wohlbekannt, hier bezeichnet die (dimensionsbehaftete) 'Brunt-Väisälä-Frequenz' N,

$$\mathrm{N}^2 = \mathrm{g} \cdot \left(\alpha \frac{\partial \overline{\mathrm{T}}}{\partial \mathrm{z}} + \frac{\alpha^2 \mathrm{gT}}{\mathrm{C_P}} \right)$$

gerade die Eigenfrequenz einer Gas- oder Flüssigkeitssäule in einem stabil geschichteten Medium (Normand et al., 1977). In Flüssigkeiten mit unendlicher Prandtlzahl reagiert jedoch das Geschwindigkeitsfeld instantan auf Änderungen des Temperaturfeldes. Ein aus der Gleigewichtslage gebrachtes 'Flüssigkeitspaket' kann in diesem Fall nicht über diese Lage hinausschiessen, da es sich gegenüber der Umgebungtemperatur gewissermassen trägheitslos verhält. Ein Auf- und Abschwingen des Paketes wird also dadurch unmöglich gemacht, dass zwischen potentieller Energie (hier im Temperaturfeld) und kinetischer Energie keine Phasenverschiebung existiert. Dies äussert sich formal darin, dass die dimensionslose, d. h. wie in Anhang A skalierte Brunt-Väisälä-Frequenz proportional zur Prandtlzahl und in unserem Fall als unendlich anzusehen ist.

Da wir uns im wesenlichen für das Einsetzen der Konvektion interessieren und keine Hinweise auf oszillatorisches Verhalten existieren, beschränken wir uns im folgenden auf den Fall $\mathrm{Im}\,(\sigma) = 0$. Die Zustände marginaler Stabilität sind dann als Lösungen von $(4.5 - 4.7)$ mit $\sigma = 0$ definiert. Für vorgegebene Materialparameter und Wellenzahl k stellt $(4.5 - 4.7)$ ein Eigenwertproblem für die Rayleighzahl dar. Die Lösung dieses Eigenwertproblems wird dadurch erschwert, dass die Koeffizienten der Eigenfunktionen und deren Ableitungen nicht konstant sind, sondern von der Tiefe abhängen. Man kann jedoch eine 'nullte Näherung' von $(4.5 - 4.7)$ einführen, indem man nur die Mittelwerte der tiefenabhängigen Parameter betrachtet und die Abweichungen vom Mittel vernachlässigt. $(4.5 - 4.7)$ werden dann zu

$$\left\langle \rho^{-1} \right\rangle \left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{dz}^2} - \mathrm{k}^2 \right) \psi - \omega = 0 \tag{4.8}$$

$$\left\langle \rho^{-1} \right\rangle \left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{dz}^2} - \mathrm{k}^2 \right) \omega - i\mathrm{k} \left\langle \alpha \right\rangle \mathrm{Ra_0 T} + \frac{4}{3} \mathrm{k}^2 \left\langle \mathrm{r}^2 \right\rangle \psi = 0 \tag{4.9}$$

$$\sigma \langle\rho\rangle \mathrm{T} + i\mathrm{k} \left\langle \mathrm{T}_{\mathrm{sa}}^{'} \right\rangle \psi - \langle\lambda\rangle \left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{dz}^2} - \mathrm{k}^2 \right) \mathrm{T} = 0, \tag{4.10}$$

was sich zu einer einzigen Gleichung für die Stromfunktion zusammenfassen lässt

$$\left\{ \left(\sigma \langle\rho\rangle - \langle\lambda\rangle \mathrm{D}^2\right) \left(\left(\left\langle \rho^{-1} \right\rangle \mathrm{D}^2\right)^2 + \frac{4}{3}\mathrm{k}^2 \left\langle \mathrm{r}^2 \right\rangle \right) - \langle\alpha\rangle \left\langle \mathrm{T}_{\mathrm{sa}}^{'} \right\rangle \mathrm{k}^2 \mathrm{Ra}_0 \right\} \psi = 0. \tag{4.11}$$

Hier bezeichnen die spitzen Klammern $\langle\rangle$ verikale Mittelung und D^2 den Operator $\mathrm{d}^2/\mathrm{dz}^2 - \mathrm{k}^2$.

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \lambda^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \rho & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho \\ \sigma\rho + \lambda\mathrm{k}^2 & -\mathrm{ikT}_{\mathrm{sa}}^{'} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^{-1}k^2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \mathrm{ik}\alpha\mathrm{Ra}_0 & -\frac{4}{3}k^2r^2 & \rho^{-1}k^2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Modell	$\mathrm{Ra_C}$	$\overline{\mathrm{Ra}}_\mathrm{C}$	$\mathrm{a_C}$	$\mathrm{z\,(w_{max})}$
incomp.	657.51	657.51	1.41	0.5
A 1	1168.4	1121.7	1.41	0.51
B 1	1504.7	1365.9	1.41	0.52
A 2	1809.9	1758.5	1.41	0.52
B 2	3382.7	3425.0	1.38	0.54

5 Stationäre Modellrechnungen

5.1 Modelle mit konstanter Wärmeleitfähigkeit

5.2 Modelle mit tiefenabhängiger Wärmeleitfähigkeit

6 Modellrechnungen zur zeitabhängigen Konvektion

7 Zusammenfassung und Ausblick

Anhang A : Die anelastisch-liquide Näherung

Die Prinzipien der Erhaltung von Masse, Impuls und Energie für eine Newtonsche Flüssigkeit im Schwerefeld werden durch die in Kapitel 3.1 vorgestellten hydrodynamischen Grundgleichungen ausgedrückt :

$$\frac{\partial \rho}{\partial \mathrm{t}} + \mathrm{div}\left(\rho \underline{\mathrm{v}}\right) = 0\,, \tag{3.1.1}$$

$$\rho \frac{\mathrm{D}\underline{\mathrm{v}}}{\mathrm{Dt}} = -\mathrm{gradP} - \rho g \underline{e_z} + \mathrm{div}\underline{\underline{\sigma}}\,, \tag{3.1.2}$$

$$\rho \mathrm{C_p} \left(\frac{\mathrm{DT}}{\mathrm{Dt}} - \frac{\alpha \mathrm{T}}{\rho \mathrm{C_p}} \frac{\mathrm{DP}}{\mathrm{Dt}} \right) = \mathrm{div}\left(\lambda \mathrm{gradT}\right) + \rho \mathrm{Q} + \frac{1}{2} \underline{\underline{\sigma}} \cdot \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}. \tag{3.1.3}$$

Dazu kommt noch die Zustandsgleichung

$$\rho = \rho_\mathrm{r} \left(1 - \alpha_\mathrm{r} \left(\mathrm{T} - \mathrm{T_s}\right) + \mathrm{K_{sr}^{-1}} \left(\mathrm{P} - \mathrm{P_H}\right)\right), \tag{3.1.4}$$

wobei sich der Index 'r' auf einen Referenzzustand mit adiabatischer Temperatur und hydrostatischem Druck bezieht. Die Bedeutung der in diesem Abschnitt auftretenden Grössen sei hier erläutert :

T : Temperatur
$\mathrm{T_S}$: adiabatische Temperatur
P : Druck
$\mathrm{P_H}$: hydrostatischer Druck
$\underline{\mathrm{v}}$: Geschwindigkeit
$\underline{\underline{\sigma}}$: Zäher Spannungstensor
$\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}$: Tensor der Verschiebungsrate
ρ : Dichte
η : Dynamische Viskosität
$\nu = \eta/\rho$: kinematische Viskosität
α : thermischer Ausdehnungskoeffizient
$\mathrm{K_S}$: adiabatischer Kompressionsmodul
λ : Wärmeleitfähigkeit
$\mathrm{C_P}$: spezifische Wärme bei konstantem Druck
$\kappa = \lambda/\left(\rho \mathrm{C_P}\right)$: Temperaturleitfähigkeit

g : Schwerebeschleunigung
$\underline{e}_z$: Einheitsvektor in z-Richtung (nach oben gerichtet)
Q : Wärmeproduktionsrate pro Masseneinheit.

Zur weiteren Betrachtung der Grundgleichungen ist es zweckmässig, die auftretenden Grössen durch eine geeignete Skalierung in eine dimensionslose Form zu bringen. Folgende charakteristische Grössen des hydrodynamischen Systems wurden als Skalenfaktoren gewählt :

Die Tiefe der Flüssigkeitsschicht d als Längeneinheit,
die thermische Diffusionszeit d^2/κ_0 als Zeiteinheit,
und die Temperaturdifferenz über die Schicht $\triangle$T als Temperatureinheit.

Der Index '0' bezeichnet durchgängig den Oberflächenwert einer Grösse. Als Einheit für die Geschwindigkeit ergibt sich dann $U = \kappa_0/d$, während die auftretenden viskosen Spannungen $U\eta_0/d$ als Druckeinheit verwendet werden.

Skaliert man noch die auftretenden druck- und temperaturabhängigen Parameter mit ihrem Oberflächenwert ($T = T_0$, $P = 0$), so lassen sich die folgenden, durch Striche gekennzeichneten dimensionslosen Grössen definieren :

$$\rho' = \frac{\rho}{\rho_0}, \quad \alpha' = \frac{\alpha}{\alpha_0}, \quad \lambda' = \frac{\lambda}{\lambda_0}, \quad \eta' = \frac{\eta}{\eta_0}, \quad \mathrm{T}_0' = \frac{\mathrm{T}_0}{\triangle \mathrm{T}}, \quad \mathrm{T}' = \frac{\mathrm{T} - \mathrm{T}_0}{\triangle \mathrm{T}}$$

$$\left(\mathrm{x}', \mathrm{y}', \mathrm{z}'\right) = \frac{1}{\mathrm{d}} \left(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}\right), \quad \mathrm{t}' = \frac{\kappa_0}{\mathrm{d}^2}\mathrm{t}, \quad \underline{\mathrm{v}}' = \frac{\mathrm{d}}{\kappa_0}\underline{\mathrm{v}}, \quad \mathrm{P}' = \frac{\mathrm{d}^2}{\kappa_0\eta_0}\mathrm{P}.$$

Ersetzt man die dimensionsbehafteten Grössen in (3.1.1 – 3.1.3) durch die dimensionslosen, so erhält man (der Übersichtlichkeit und Einfachheit halber werden die Striche sofort wieder weggelassen) :

$$\frac{\partial \rho}{\partial \mathrm{t}} + div\left(\rho \underline{\mathrm{v}}\right) = 0 \qquad A.1$$

$$\frac{\rho}{\mathrm{Pr}} \frac{\mathrm{D}\underline{\mathrm{v}}}{\mathrm{Dt}} = -grad\mathrm{P} - \rho \frac{\mathrm{Ra}_0}{\mu_0} \underline{\mathrm{e}_\mathrm{z}} + div\underline{\underline{\sigma}} \qquad A.2$$

$$\rho \frac{\mathrm{DT}}{\mathrm{Dt}} - \alpha \frac{\mathrm{D}_0 \mu_0}{\mathrm{Ra}_0} \left(\mathrm{T}_0 + \mathrm{T}\right) \frac{\mathrm{DP}}{\mathrm{Dt}} = div\left(\lambda grad\mathrm{T}\right) + \rho \frac{\mathrm{Ra_Q}}{\mathrm{Ra_0}} + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{D}_0}{\mathrm{Ra}_0} \underline{\underline{\sigma}} \cdot\cdot \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}. \qquad A.3$$

Die Zustandsgleichung (3.1.4) lautet in dimensionsloser Form

$$\rho = \rho_\mathrm{r} \left(1 - \alpha_\mathrm{r}\mu_0 \left(\mathrm{T} - \mathrm{T_S}\right) + \frac{\alpha_\mathrm{r}}{\rho_\mathrm{r}\gamma_\mathrm{r}} \frac{\mu_0 \mathrm{D}_0}{\mathrm{Ra}_0 \gamma_0} \left(\mathrm{P} - \mathrm{P_H}\right)\right). \qquad A.4$$

Hier wurde der Grüneisenparameter γ neu eingeführt :

$$\gamma = \frac{\alpha \mathrm{K_S}}{\rho \mathrm{C_p}}.$$

Die Grössen g und $\mathrm{C_p}$ wurden als konstant angenommen, während die (jetzt dimensionslosen) Grössen α, γ und λ i.A. von Druck und Temperatur abhängig sind (siehe Kap. 3.1). Als dimensionslose Ähnlichkeitsparameter treten nun auf :

Prandtlzahl	$\mathrm{Pr} = \frac{\nu_0}{\kappa_0}$
Rayleighzahl	$\mathrm{Ra}_0 = \frac{\alpha_0 \triangle \mathrm{T} g d^3}{\nu_0 \kappa_0}$
Rayleighzahl bei interner Heizung	$\mathrm{Ra_Q} = \frac{\alpha_0 \mathrm{Q} g d^5}{\kappa_0^2 \nu_0 \mathrm{C_p}}$
Dissipationszahl	$\mathrm{D}_0 = \frac{\alpha_0 g d}{\mathrm{C_p}}$
	$\frac{\mathrm{D}_0}{\gamma_0} = \frac{\alpha_0 g d}{\gamma_0 \mathrm{C_p}}$
	$\mu_0 = \alpha_0 \triangle \mathrm{T}$

Die Gleichungen $(A.1 - A.4)$ sehen zwar komplizierter aus als $(3.1.1 - 3.1.4)$, jedoch lässt ihre dimensionslose Form einige Abschätzungen und nützliche Näherungen zu, die wir im folgenden durchführen werden.

Medien wie der Erdmantel, in denen Flussvorgänge durch Festkörperkriechen stattfindet, sind generell hochviskos und haben damit so hohe Prandtlzahlen (Erdmantel : $\mathrm{Pr} \approx 10^{23}$), dass die Näherung $\mathrm{Pr} \to \infty$ gerechtfertigt ist. Für die numerische Behandlung der Grundgleichungen ist dies ein grosser Vorteil, da in dieser Näherung die nichtlinearen Trägheitsterme auf der linken Seite von $(A.2)$ und mit ihnen einige numerische Schwierigkeiten verschwinden.

Ferner liegen in solchen Medien die Fliessgeschwindigkeiten in der Grössenordnung von einigen Zentimetern pro Jahr, während die Geschwindigkeit elastischer Wellen einige Kilometer pro Sekunde beträgt. Daher kann man bei der Simulation von Konvektion die Ausbreitung elastischer Wellen vernachlässigen, indem man in der Kontinuitätsgleichung $(A.1)$ den Term $\partial\rho/\partial \mathrm{t}$ streicht. Diese Vernachlässigung ist der 'anelastische' Teil der anelastisch-liquiden Approximation, der 'liquide' Teil wird weiter unten erläutert.

Führt man die Näherungen $\mathrm{Pr} \to \infty$ und $\partial\rho/\partial \mathrm{t} = 0$ ein und eliminiert man den Druckgradienten aus $(A.2)$ durch Bildung der Rotation, so erhält man

$$\mathrm{div}\,(\rho \underline{\mathrm{v}}) = 0 \qquad A.5$$

$$\mathrm{rotdiv}\underline{\underline{\sigma}} = \frac{\mathrm{Ra}_0}{\mu_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial \mathrm{y}} \underline{\mathrm{e}}_{\mathrm{x}} - \frac{\partial \rho}{\partial \mathrm{x}} \underline{\mathrm{e}}_{\mathrm{y}} \right). \qquad A.6$$

Setzt man jetzt in (A.6) die Zustandsgleichung (A.4) ein, so ergibt sich

$$\mathrm{rotdiv}\underline{\underline{\sigma}} = \frac{\alpha_r D_0}{\gamma_r \gamma_0}\left[\left(\mathrm{div}\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{e}_y\right)\underline{e}_x - \left(\mathrm{div}\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{e}_x\right)\underline{e}_y\right] - \rho_r \alpha_r \mathrm{Ra}_0 \left(\frac{\partial T}{\partial y}\underline{e}_x - \frac{\partial T}{\partial y}\underline{e}_y\right). \qquad A.7$$

Dabei wurde ausgenutzt, dass die mit ‘r’ indizierten Grössen in der Zustandsgleichung nur noch von der Tiefe abhängen. Die Terme auf der rechten Seite repräsentieren Auftriebskräfte aufgrund lateraler Druck- bzw. Temperaturvariationen.

Spaltet man in (A.3) den Druck auf in einen hydrostatischen und einen superhydrostatischen Anteil ($P = P_H + P_1$) und benutzt man die (dimensionslose) Relation

$$\frac{dP_H}{dz} = -\frac{\mathrm{Ra}_0}{\mu_0}\rho_r$$

so wird (A.3) zu :

$$\rho\frac{DT}{Dt} - \alpha\frac{D_0\mu_0}{\mathrm{Ra}_0}(T_0 + T)\frac{DP_1}{Dt} + \alpha D_0 \rho w (T_0 + T)$$
$$= \qquad A.8$$
$$\mathrm{div}(\lambda \mathrm{grad}T) + \rho\frac{\mathrm{Ra}_Q}{\mathrm{Ra}_0} + \frac{1}{2}\frac{D_0}{\mathrm{Ra}_0}\underline{\underline{\sigma}} \cdot\cdot \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}.$$

Der ‘liquide’ Teil der Approximation besteht nun aus der Vernachlässigung aller Terme, in denen der Parameter μ_0 auftritt. Anders als in Gasen, wo α und $\triangle T$ in etwa die gleiche Grössenordnung haben, gilt für die meisten Anwendungen in Flüssigkeiten $\mu_0 = \alpha_0 \triangle T \ll 1$ (Erdmantel : $\mu_0 \approx 10^{-2}$), was diese Näherung rechtfertigt und ihr den Namensteil ‘liquide’ eingebracht hat. Die hydrodynamischen Grundgleichungen lauten also in der anelastisch-liquiden Approximation (für unendliche Prandtlzahl) :

$$\mathrm{div}(\rho \underline{v}) = 0 \qquad A.9$$

$$\mathrm{rotdiv}\underline{\underline{\sigma}} = \frac{\alpha_r D_0}{\gamma_r \gamma_0}\left[\left(\mathrm{div}\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{e}_y\right)\underline{e}_x - \left(\mathrm{div}\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{e}_x\right)\underline{e}_y\right] - \rho_r \alpha_r \mathrm{Ra}_0 \left(\frac{\partial T}{\partial y}\underline{e}_x - \frac{\partial T}{\partial x}\underline{e}_y\right) \qquad A.10$$

$$\rho_r\frac{DT}{Dt} + \alpha_r D_0 (T_0 + T) w = \mathrm{div}(\lambda_r \mathrm{grad}T) + \rho_r\frac{\mathrm{Ra}_Q}{\mathrm{Ra}_0} + \frac{1}{2}\frac{D_0}{\mathrm{Ra}_0}\underline{\underline{\sigma}} \cdot\cdot \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} \qquad A.11$$

Ähnlich wie in der Boussinesq-Approximation werden also Abweichungen von der Referenzdichte nur im Auftriebsterm berücksichtigt. Man erhält die Boussinesq-Approximation aus der anelastisch-liquiden im Grenzfall $D_0 \to 0$. Da in (A.9)- (A.11) stets nur die Referenzgrössen α_r, ρ_r, γ_r, und λ_r verwendet werden, wird dieser Index ab sofort weggelassen.

Für zweidimensionale Probleme mit konstanter Viskosität lassen sich $(A.9)$- $(A.11)$ noch erheblich vereinfachen. Die Kontinuitätsgleichung lässt sich dann durch die Einführung einer skalaren Stromfunktion ψ mit

$$(\mathrm{u}, 0, \mathrm{w}) = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\psi}{\partial \mathrm{z}}, 0, -\frac{\partial\psi}{\partial \mathrm{x}}\right) \qquad A.12$$

implizit erfüllen. Setzt man weiterhin die Definition des isoviskosen Spannungstensors

$$\underset{=}{\sigma}_{\mathrm{ij}} = \frac{\partial \mathrm{v_i}}{\partial \mathrm{x_j}} + \frac{\partial \mathrm{v_j}}{\partial \mathrm{x_i}} - \frac{2}{3}\delta_{\mathrm{ij}}\mathrm{div}\underline{\mathrm{v}}$$

in $(A.10)$ ein und führt die y-Komponente der Vorticity durch

$$\omega = \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{z}} - \frac{\partial \mathrm{w}}{\partial \mathrm{x}}$$

ein, so wird die y-Komponente von $(A.10)$ zu

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial \mathrm{x}^2} + \frac{\partial^2\omega}{\partial \mathrm{z}^2} + \frac{\alpha \mathrm{D}_0}{\gamma\gamma_0}\left(\frac{4}{3}\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}\left(\mathrm{div}\underline{\mathrm{v}}\right) + \frac{\partial\omega}{\partial \mathrm{z}}\right) = \alpha\rho \mathrm{Ra}_0\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \mathrm{x}}. \qquad A.13$$

Die beiden anderen Komponenten verschwinden in zweidimensionalen Problemen. Benutzt man jetzt noch die Relationen

$$\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{dz}} = -\frac{\alpha \mathrm{D}_0}{\gamma\gamma_0} \quad \text{und} \quad \mathrm{div}\underline{\mathrm{v}} = \frac{1}{\rho^2}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{dz}}\frac{\partial\psi}{\partial \mathrm{x}},$$

und bildet die Rotation von $(A.12)$, so erhält man die von uns verwendete Form der hydrodynamischen Grundgleichungen in der anelastisch-liquiden Näherung als :

$$\hat{\mathrm{L}}\psi = \omega \qquad A.14$$

$$\hat{\mathrm{L}}\omega = \alpha \mathrm{Ra}_0\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \mathrm{x}} + \frac{4}{3}\left(\frac{\alpha \mathrm{D}_0}{\rho\gamma\gamma_0}\right)^2\frac{\partial^2\psi}{\partial \mathrm{x}^2} \qquad A.15$$

$$\rho\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \mathrm{t}} + \frac{\partial\psi}{\partial \mathrm{z}}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \mathrm{x}} - \frac{\partial\psi}{\partial \mathrm{x}}\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \mathrm{z}} + \alpha \mathrm{D}_0\left(\mathrm{T}_0 + \mathrm{T}\right)\right) - \mathrm{div}\left(\lambda \mathrm{grad}\mathrm{T}\right) = \rho\frac{\mathrm{Ra_Q}}{\mathrm{Ra}_0} + \frac{\mathrm{D}_0}{\rho^2\mathrm{Ra}_0}\Phi. \qquad A.16$$

Der modifizierte Laplace-Operator $\hat{\mathrm{L}}$ und die Dissipationsfunktion Φ sind hier wie folgt definiert :

$$\hat{\mathrm{L}} = \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}} \right) + \frac{\partial}{\partial \mathrm{z}} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \mathrm{z}} \right)$$

$$\Phi = \left(2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \mathrm{x} \partial \mathrm{z}} + \frac{\alpha \mathrm{D}_0}{\gamma \gamma_0} \frac{\partial \psi}{\partial \mathrm{x}} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \mathrm{z}^2} + \frac{\alpha \mathrm{D}_0}{\gamma \gamma_0} \frac{\partial \psi}{\partial \mathrm{z}} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \mathrm{x}^2} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{\alpha \mathrm{D}_0}{\gamma \gamma_0} \frac{\partial \psi}{\partial \mathrm{x}} \right)^2 .$$

Anhang B : Das Prinzip des Austauschs der Stabilität

Mit der Definition der Funktionen

$$\mathrm{G} = \left\langle \rho^{-1} \right\rangle \left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{dz}^2} - \mathrm{k}^2 \right) \psi$$

$$\mathrm{F} = \left(\left\langle \rho^{-1} \right\rangle^2 \left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{dz}^2} - \mathrm{k}^2 \right)^2 + \frac{4}{3} \mathrm{k}^2 \left\langle \mathrm{r}^2 \right\rangle \right) \psi = \mathrm{ik} \left\langle \alpha \right\rangle \left\langle \mathrm{T}_{\mathrm{sa}}^{'} \right\rangle \mathrm{Ra}_0 \mathrm{T}$$

lautet Gleichung (4.11)

$$\left(\sigma \left\langle \rho \right\rangle - \left\langle \lambda \right\rangle \left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{dz}^2} - \mathrm{k}^2 \right) \right) \mathrm{F} = - \left\langle \alpha \right\rangle \left\langle \mathrm{T}_{\mathrm{sa}}^{'} \right\rangle \mathrm{k}^2 \mathrm{Ra}_0 \psi.$$

Multiplikation mit der konjugiert komplexen von F, F^*, und Integration über die gesamte Schicht liefert dann

$$\int_0^1 \mathrm{F}^* \left(\sigma \left\langle \rho \right\rangle - \left\langle \lambda \right\rangle \left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{dz}^2} - \mathrm{k}^2 \right) \right) \mathrm{Fdz} = - \left\langle \alpha \right\rangle \left\langle \mathrm{T}_{\mathrm{sa}}^{'} \right\rangle \mathrm{Ra}_0 \int_0^1 \mathrm{F}^* \psi \mathrm{dz}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\left(\sigma \left\langle \rho \right\rangle + \mathrm{k}^2 \right) \int_0^1 \mathrm{F}^* \mathrm{Fdz} - \left\langle \lambda \right\rangle \int_0^1 \mathrm{F}^* \frac{\mathrm{d}^2 \mathrm{F}}{\mathrm{dz}^2} \mathrm{dz} =$$

$$- \left\langle \alpha \right\rangle \left\langle \mathrm{T}_{\mathrm{sa}}^{'} \right\rangle \mathrm{k}^2 \mathrm{Ra}_0 \int_0^1 \left(\left\langle \rho^{-1} \right\rangle^2 \left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{dz}^2} - \mathrm{k}^2 \right)^2 + \frac{4}{3} \mathrm{k}^2 \left\langle \mathrm{r}^2 \right\rangle \right) \psi^* \psi \mathrm{dz} \qquad B.1$$

Einsetzen der Definition von G auf der rechten Seite und einmalige partielle Integration des zweiten Terms auf der linken Seite ergibt (wegen der Randbedingung $\mathrm{F} = \mathrm{F}^* = 0$)

$$\left(\sigma\left\langle\rho\right\rangle+\mathrm{k}^2\right)\int\limits_0^1\left|\mathrm{F}\right|^2\mathrm{dz}+\left\langle\lambda\right\rangle\int\limits_0^1\left|\frac{\mathrm{dF}}{\mathrm{dz}}\right|^2\mathrm{dz}=$$

$$-\left\langle\alpha\right\rangle\left\langle\mathrm{T}_{\mathrm{sa}}^{'}\right\rangle\mathrm{k}^2\mathrm{Ra}_0\left\{\frac{4}{3}\mathrm{k}^2\left\langle\mathrm{r}^2\right\rangle\int\limits_0^1\left|\psi\right|^2\mathrm{dz}+\left\langle\rho^{-1}\right\rangle\int\limits_0^1\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{dz}^2}-\mathrm{k}^2\right)\mathrm{G}^*\psi\mathrm{dz}\right\}.$$

Betrachtet man nun den Term $\int\limits_0^1 \mathrm{d}^2\mathrm{G}^*/\mathrm{dz}^2\psi\mathrm{dz}$, so erhält man nach zweimaliger partieller Integration

$$\int\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{G}^*}{\mathrm{dz}^2}\psi\mathrm{dz}=\left[\frac{\mathrm{dG}^*}{\mathrm{dz}}\psi\right]_0^1-\left[\mathrm{G}^*\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{dz}}\right]_0^1+\int\limits_0^1\mathrm{G}^*\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{dz}^2}\mathrm{dz}.$$

Mit den Randbedingungen $\psi = 0$ und entweder $\mathrm{G} = 0$ für scherspannungsfreies Gleiten oder $\mathrm{d}\psi/\mathrm{dz} = 0$ für feste Oberflächen verschwinden die Klammerausdrücke und Gleichung (B.1) lässt sich folgendermassen schreiben :

$$\sigma\left\langle\rho\right\rangle\int\limits_0^1\left|\mathrm{F}\right|^2\mathrm{dz}=-\mathrm{k}^2\int\limits_0^1\left|\mathrm{F}\right|^2\mathrm{dz}-\left\langle\lambda\right\rangle\int\limits_0^1\left|\frac{\mathrm{dF}}{\mathrm{dz}}\right|^2\mathrm{dz}$$

$$-\left\langle\alpha\right\rangle\left\langle\mathrm{T}_{\mathrm{sa}}^{'}\right\rangle\mathrm{k}^2\mathrm{Ra}_0\left\{\frac{4}{3}\mathrm{k}^2\left\langle\mathrm{r}^2\right\rangle\int\limits_0^1\left|\psi\right|^2\mathrm{dz}+\int\limits_0^1\left|\mathrm{G}\right|^2\mathrm{dz}\right\}.$$

Da die rechte Seite rein reell ist und der Ausdruck $\left\langle\rho\right\rangle\int\limits_0^1\left|\mathrm{F}\right|^2\mathrm{dz}$ für $\left\langle\mathrm{T}_{\mathrm{sa}}^{'}\right\rangle\neq 0$ positiv definit ist, muss der Imaginärteil von σ also für $\left\langle\mathrm{T}_{\mathrm{sa}}^{'}\right\rangle\neq 0$ verschwinden. Für den Zustand marginaler Stabilität gilt mithin $\mathrm{Re}\left(\sigma\right)=\mathrm{Im}\left(\sigma\right)=0$ und Gleichung (4.11) lautet

$$\left\{-\left\langle\lambda\right\rangle\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{dz}^2}-\mathrm{k}^2\right)\left(\left\langle\rho^{-1}\right\rangle^2\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{dz}^2}-\mathrm{k}^2\right)^2+\frac{4}{3}\mathrm{k}^2\left\langle\mathrm{r}^2\right\rangle\right)+\left\langle\alpha\right\rangle\left\langle\mathrm{T}_{\mathrm{sa}}^{'}\right\rangle\mathrm{k}^2\mathrm{Ra}_0\right\}\psi=0. \qquad B.2$$

Die Gleichungen (4.8) und (4.9) können zu

$$\left\langle\rho^{-1}\right\rangle^2\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{dz}^2}-\mathrm{k}^2\right)^2\psi+\frac{4}{3}\mathrm{k}^2\left\langle\mathrm{r}^2\right\rangle\psi=\mathrm{ik}\left\langle\alpha\right\rangle\left\langle\mathrm{T}_{\mathrm{sa}}^{'}\right\rangle\mathrm{Ra}_0\mathrm{T} \qquad B.3$$

zusammengefasst werden. Für scherspannungsfreies Gleiten und festgehaltene Temperatur an den Oberflächen gelten die Randbedingungen $\psi = d^2\psi/dz^2 = T = 0$ und folglich nach (B.3) auch $d^4\psi/dz^4 = 0$. Einsetzen in (B.2) liefert sofort

$$\frac{\mathrm{d}^6\psi}{\mathrm{dz}^6} = 0 \qquad (\mathrm{z} = 0, 1)$$

und durch sukzessive zweimalige Ableitung schliesslich

$$\frac{\mathrm{d}^{2\mathrm{n}}\psi}{\mathrm{dz}^{2\mathrm{n}}} = 0 \qquad (\mathrm{z} = 0, 1).$$

Die Eigenfunktionen von (B.2) sind daher durch $\psi_\mathrm{n}(\mathrm{z}) = \psi_\mathrm{n} \sin(\mathrm{n}\pi\mathrm{z})$ gegeben und es folgt sofort die Beziehung (4.12) für die kritische Rayleighzahl.

Literaturverzeichnis

[1] **Anderson, D.L.**, A seismic equation of state II, shear properties and thermodynamics of the lower mantle, Phys. Earth Planet. Int., **45**, 307-323, 1987a

[2] **Anderson, D.L.**, Thermally induced phase changes, lateral heterogeneity of the mantle, continental roots and deep slab anomalies, J. Geophys. Res., **92**, 13968-13980, 1987b

[3] **Anderson, O., Chopelas, A. und R. Boehler**, Thermal expansivity versus pressure at constant temperature : a re-examination, Geophys. Res. Lett., zur Veröffentlichung eingereicht, 1990

[4] **Bénard, H.**, Les tourbillons cellulaires dans une mappe liquide transportant de la chaleur par convection en regime permanent, Ann. Chim. Phys., **23**, 62-144, 1901

[5] **Chopelas, A. und R. Boehler**, Thermal expansion measurements at very high pressure, systematics, and a case for a chemically homogeneous mantle, Geophys. Res. Lett., **16**, 1347-1350, 1989

[6] **Christensen, U.**, Convection with pressure- and tempature-dependent non-Newtonian rheology, Geophys. J. R. Astron. Soc., **77**, 343-348, 1984

[7] **Creager, K. C. und T. H. Jordan**, Aspherical structure of the core-mantle boundary from PKP travel times, Geophys. Res. Lett., **13**, 1497-1500, 1986

[8] **Gurnis, M.**, Large-scale mantle convection and the aggregation and dispersal of supercontinents, Nature, **332**, 695-699, 1988

[9] **Hansen, U. und A. Ebel**, Time-dependent thermal convection - a possible explanation for a multiscale flow in the Earth's mantle, Geophys. J., **94**, 181-191, 1988

[10] **Hansen, U. und D. A. Yuen**, Numerical simulations of thermal-chemical instabilities at the core-mantle boundary, Nature, **334**, 1988

[11] **Jarvis, G.T. und D.P. McKenzie**, Convection in a compressible fluid with infinite Prandtl number, J. Fluid Mech., **96**, 515-583, 1980

[12] **Jeanloz, R. und E. Knittle**, Density and composition of the lower mantle, Phil. Trans. R. Soc. Lond. A, **328**, 1989

[13] **Jeffreys, H.**, The instability of a compressible fluid heated below, Proc. Cam. Phil. Soc., 26, 170-172, 1930

[14] **Lay, T.**, Structure of the core-mantle transition zone : A chemical and thermal boundary layer, EOS Trans. AGU, Januar 1989

[15] **Leitch, A. M., Yuen, D. A. und G. Sewell**, Mantle convection with internal heating and pressure-dependent thermal expansivity, Earth Planet. Sci. Lett., im Druck, 1991

[16] **Lorenz, E. N.**, Deterministic nonperiodic flow, J. Atmos. Sci., **20**, 130-141, 1963

[17] **Machetel, P. und D. A. Yuen**, Penetrative convective flows induced by internal heating and mantle compressibility, J. Geophys. Res., **94**, 10609-10626, 1989

[18] **Mayer, D. H.**, Turbulenz : Durchbruch in einem lange ungelösten Problem ?, Phys. Bl., **38**, 55-59 und 87-92, 1984

[19] **McKenzie, D. P., Roberts, J. M. und N. O. Weiss**, Convection in the Earth's mantle : Towards a numerical simulation, J. Fluid Mech., **62**, 465-538, 1974

[20] **McLaughlin, J. B. und P.C. Martin**, Transition to turbulence in a statically stressed fluid system, Phys. Rev., **A12**, 186-203, 1975

[21] **Normand, C., Pomeau, Y. und M. G. Velarde**, Convective instability : A Physicist's approach, Rev. Mod. Phys., **49**, 581-624, 1977

[22] **Olson, P., Silver, P. G. und R. W. Carlson**, The large scale structure of convection in the Earth's mantle, Nature, **344**, 209-215, 1990

[23] **O'Nions, R. K., Evensen, N. M. und P. J. Hamilton**, Geochemichal modeling of mantle differentiation and crustal growth, J. Geophys. Res., **84**, 6091-6101, 1979

[24] **Rayleigh, Lord**, On convection currents in a horizontal layer of fluid when the higher temperature is on the under side, Phil. Mag., **32**, 529-546, 1916

[25] **Ross, R. G., Andersson, P., Sundqvist, B. und G. Bachstroem**, Thermal conductivity of solids and liquids under pressure, Rep. Prog. Phys., **47**, 1347-1402, 1984

[26] **Schmeling, H.**, Compressible convection with with constant and variable viscosity : the effect on slab formation geoid and topography, J. Geophys. Res., **94**, 12463-12481, 1989

[27] **Silver, P.G., Carlson, R. W. und P. Olson**, Deep slabs, geochemical heterogeneity, and the large-scale structure of mantle convection : Investigation of an enduring paradox, Ann. Rev. Earth Planet. Sci., **16**, 477-541, 1988

[28] **Steinbach, V., Hansen, U. und A. Ebel**, Compressible convection in the Earth's mantle : A comparison of different approaches, Geophys. Res. Lett., **16**, 633-636, 1989

[29] **Schwarz, H.R.**, Methode der finiten Elemente, Teubner Studienbücher, Stuttgart, 1980

[30] **Yorke, J.A. und E.D. Yorke**, Chaotic behaviour and fluid dynamics, Topics in Applied Physics, **45**, 77-96, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1981

[31] **Yuen, D. A. und S. Zhang**, Equation of state and rheology in deep mantle convection, in : A. Navrotsky und P. J. Weidner (Hrsgb.), Perovskites, AGU Monograph series, **45**, 131-146, 1989

[32] **Zhou, H. W., Anderson, D. L. und R. W. Clayton**, Modeling of residual spheres for subduction zone earthquakes, 1. Apparent slab penetration signatures in the NW Pacific caused by deep diffusive mantle anomalies, J. Geophys. Res., **95**, 1990

[33] **Zienkiewicz, O.C.**, The finite element method, McGraw-Hill, 3. Auflage, London, 1977

Danksagung

Besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr. A. Ebel für die Bereitstellung des Themas und das Interesse an meiner Arbeit.

Für die fachliche Unterstützung im Institut für Geophysik gebührt mein Dank Herrn Dr. Ulrich Hansen, ohne dessen Engagement diese Arbeit wohl nicht entstaden wäre.

Als ausserordentlich fruchtbar hat sich der Gedankenaustausch mit Herrn Prof. Dr. D. A. Yuen (Minneapolis) erwiesen, der meiner Arbeit wesenliche Impulse geben konnte. Ihm danke ich auch für die Ermöglichung zweier interessanter Forschungsaufenthalte am Minnesota Supercomputer Institute.

Frau Dagmar Olbertz, Herrn Joerg Schmalzl und Herrn Guido Sierens möchte ich für ihre praktische Mithilfe bei der Erstellung des Manuskriptes danken.

Last but not least bedanke ich mich bei Herrn Dipl. Geophys. Rolf vom Stein für all die Zeit, die er für die rechnertechnische und praktische Unterstützung meiner Arbeiten geopfert hat, und für seine persönliche Zuwendung während unserer gemeinsamen Zeit am Institut für Geophysik.