

EXPERIMENTE ZUR THERMISCH
GETRIEBENEN KONVEKTION UND
IHRE INTERPRETATION AUS DER
SICHT DER NICHTLINEAREN
DYNAMIK

Volker Steinbach

Februar 1985

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	7
2	Nichtlineare Dynamik	9
2.1	Die hydrodynamischen Grundgleichungen	10
2.2	Grundlagen der nichtlinearen Dynamik	13
2.2.1	Bahnen im Phasenraum	13
2.2.2	Stabilitaet	15
2.2.3	Dissipative Systeme	16
2.2.4	Fixpunkte	17
2.2.5	Grenzzyklen	22
2.3	Eindimensionale diskrete Systeme	25
2.4	Kontinuierliche Dynamik in drei Dimensionen	36
2.4.1	Das Rayleigh-Benard-Problem	36
2.4.2	Das 3-Moden-Modell von Lorenz	40
2.4.3	Fixpunkte des Modells	42
2.4.4	Der Lorenz-Attraktor	44
2.4.5	Bifurkationen	46
3	Rayleigh-Benard-Konvektion aus der Sicht der Nichtlinearen Dynamik	51
3.1	Der lineare Bereich	52
3.2	Der Uebergang zur Turbulenz	58
3.3	Turbulenz	66
4	Eigene Experimente	73
4.1	Versuchsaufbau und Messgroessen	74
4.2	Auswertung der Messungen	77
4.2.1	Verwendete Zeitreihen	77
4.2.2	Spektralanalyse der Zeitreihen	81
4.2.3	Anwendung des Verfahrens von Malraison et al.	87
5	Geophysikalische Betrachtungen	95

Inhaltsverzeichnis

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit befasst sich aus geophysikalischer Sicht mit den zeitabhängigen Formen der Rayleigh-Benard-Konvektion. Die fuer die Behandlung der Problemstellung benoetigten grundlegenden Begriffe und Konzepte der Theorie der nichtlinearen Dynamik werden eingefuehrt und die bisherigen Ergebnisse der Anwendung dieser Konzepte auf das Problem der Rayleigh-Benard-Konvektion vorgestellt.

In eigenen Versuchen wurden Temperaturen an festen Punkten innerhalb einer Fluesigkeit mit temperaturabhaengiger Viskositaet bei verschiedenen Rayleighzahlen aufgezeichnet. Die Auswertung der Zeitreihen zeigt, dass bei allen erreichten Rayleighzahlen langperiodische Temperaturvariationen dominieren. Dies scheint charakteristisch fuer Systeme mit grossem Querverhaeltnis zu sein. Die langperiodischen Schwankungen werden bei wachsender Rayleighzahl in zunehmendem Masse von kurzperiodischen ueberlagert, die Analyse der resultierenden Zeitreihen weist auf die Existenz seltsamer Attraktoren hin, deren fraktale Dimension mit der Rayleizahl waechst.

Obwohl eine direkte Uebertragung der Laborergebnisse auf Stroemungen unter Bedingungen wie im Erdmantel nicht moeglich ist, ergeben sich doch im Lichte der Interpretation mit Hilfe der Theorie nichtlinearer dissipativer Systeme interessante geophysikalische Implikationen. Diese betreffen z. B. die Zeitabhaengigkeit von Konvektionsstroemungen im Mantel und die geologische Entwicklung der Erde sowie das moeglicherweise chaotische Verhalten dieser Srtoemungen ueber lange Zeitraeume hinweg, das an Turbulenz erinnert.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Das Phaenomen der Konvektion praegt viele Bereiche der Geophysik, in denen fliessfahige Medien angetroffen werden : den auseren Erdkern, die Ozeane und die Atmosphaere ebenso wie die Sonne. Der Erdmantel reagiert auf die kurzzeitigen Belastungen seismischer Wellen wie ein Festkoerper und seine Temperatur liegt unterhalb der Schmelztemperatur. Die Theorien der Plattentektonik und der Isostasie beruhen jedoch auf der Annahme eines fluessigen Erdmantels. Dieser Widerspruch konnte geloest werden, als man entdeckte, dass das Mantelmaterial auf laenger andauernde Belastungen mit FlieSSmechanismen wie Diffusionskriechen und Versetzungsgleiten reagieren kann (Weertmann und Weertmann, 1975). Die Viskositaet zumindest des oberen Erdmantels konnte einerseits aus Messungen der postglazialen Hebung Skandinaviens und Nordamerikas (Cathless, 1975; Peltier und Andrews, 1976; Peltier und Wu, 1982), andererseits aus Ergebnissen von Labormessungen (Kohlstedt und Goetze, 1974; Weertmann und Weertmann, 1975; Carter, 1976) abgeschaezt werden.

Eine hydrodynamische Stabilitaetsanalyse ergab dann, dass thermisch getriebene Konvektionsstroemungen im Erdmantel sehr wahrscheinlich sind. Die raeumliche und zeitliche Ausformung solcher Stroemungen ist jedoch stark abhaengig von den Materialparametern und den Rand- sowie Anfangsbedingungen (Busse und Whitehead, 1971; Busse und Whitehead, 1974; Busse, 1981). Da direkte Messungen im Erdmantel nicht moeglich sind, muss der Zusammenhang zwischen Stroemungsformen und einigen direkt beobachtbaren Groessen wie Waermeffluss, Plattengeschwindigkeit usw. in Modellversuchen hergestellt werden.

Numerische Modelle sind wegen der zunehmenden Leistungsfahigkeit sowohl der Computer als auch der numerischen Methoden in letzter Zeit immer haeufiger und genauer geworden. Ihre gravierenden Vorteile liegen darin, dass sich der fuer den Erdmantel relevante Parameterbereich simulieren laesst und dass die genaue Bestimmung von Groessen wie Waermeffluss, Oberflaechengeschwindigkeit, mittlere Temperaturen u. ae. moeglich ist. Auf der anderen Seite ist zur Zeit aus technischen Gruenden eine Vereinfachung der hydrodynamischen Gleichungen sowie die Beschraenkung auf zweidimensionale Konvektionsmodelle unumgaenglich.

In Laborversuchen laesst sich insbesondere die hohe Prandtl-Zahl des Erdmantels nicht erreichen. Daher sind Ergebnisse aus Experimenten nur sehr beschraenkt auf den Erdmantel anwendbar. Gerade Laborexperimente brachten aber bis in die juengste Vergangenheit immer mehr Aufschluss ueber grundlegende Phaenomene im Bereich der Konvektion (Maurer und Libchaber, 1979; Gollub und Benson, 1980; Busse, 1981). Es war daher das Ziel dieser Unternehmung, parallel zu den am Institut durchgefuehrten numerischen

1 Einleitung

Experimenten (Hansen 1983; Hansen und Ebel, 1984), anhand einfacher Laborversuche Erkenntnisse zu gewinnen ueber die raeumliche und zeitliche Struktur der Konvektion in einer Fluessigkeit mit hoher, temperaturabhaengiger Viskositaet. Die Versuche wurden gemeinsam mit Ch. Kuth durchgefuehrt. Nachdem die Untersuchung der raeumlichen Struktur stationaerer Stroemungen abgeschlossen ist (Kuth, 1983), befasse ich mich in der vorliegenden Arbeit mit zeitabhaengigen Konvektionsstroemungen.

Mit der Theorie der nichtlinearen Dynamik versucht die theoretische Physik, die Entwicklung von Systemen zu erklaren, die durch nichtlineare Gleichungen beschrieben werden. Die Bedeutung dieser Theorie fuer die Hydrodynamik wurde vor allem durch die Arbeiten von Lorenz (1963) und Ruelle und Takens (1971) deutlich. Der Gebrauch einiger grundlegender Ideen und Begriffe der nichtlinearen Dynamik ist in der Geophysik noch ungewohnt. Deshalb werden im zweiten Kapitel dieser Arbeit die Grundlagen der nichtlinearen Theorie eingefuehrt und anhand von Beispielen erlaeutert. In Kapitel 3 werden einige Experimente zum Uebergang von stationaeren zu turbulenten Konvektionsstroemungen vorgestellt, die die theoretischen Voraussagen bestaetigen. Ferner werden verschiedene neue Methoden zur Behandlung turbulenter Stroemungen diskutiert. Die Beschreibung der eigenen Versuche und die Diskussion ihrer Ergebnisse im Sinne der Theorie nichtlinearer dissipativer Systeme und im Hinblick auf geophysikalische Implikationen folgen schliesslich in den Kapiteln 4 und 5.

2 Nichtlineare Dynamik

Die Theorie der nichtlinearen Dynamik befasst sich mit Systemen, deren zeitliche Entwicklung durch nichtlineare Gleichungen beschrieben wird. Einfache Systeme mit nur wenigen gewöhnlichen Differentialgleichungen zeigen in wichtigen Punkten das gleiche Verhalten wie hydrodynamische Systeme, die durch nichtlineare partielle Differentialgleichungen beschrieben werden (Mayer, 1982). Das Studium solch einfacher Systeme kann also Aufschluss bringen ueber Vorgaenge, die auch das zeitliche Verhalten von Fluessigkeitsstroemungen bestimmen.

In den von uns durchgefuehrten Versuchen wurden zeitabhaengige Stroemungen beobachtet, die den in fruheren Laborexperimenten und numerischen Modellen gefundenen aehnlich sind (s. Kapitel 3-5). Einige geodynamische und geothermische Prozesse lassen darauf schliessen, dass solche Stroemungsformen auch im Erdmantel existieren (Turcotte und Schubert, 1982). Auf der Grundlage der Konzepte der nichtlinearen Dynamik konnten Verfahren zur Untersuchung nichtlinearer Systeme entwickelt werden, die Rueckschluesse zulassen auf die physikalischen Mechanismen, die zeitabhaengiges Verhalten bewirken. Daher werden in diesem Kapitel zunaechst die grundlegenden Begriffe aus der Theorie der nichtlinearen Dynamik eingefuehrt. Die Betrachtung zweier einfacher nichtlinearer Systeme, der logistischen Gleichung und des Lorenz-Modells, dient schliesslich als Beispiel fuer den Uebergang solcher Systeme von stationaerem zu chaotischem Verhalten.

2.1 Die hydrodynamischen Grundgleichungen

Betrachtet man ein flüssiges oder gasförmiges Medium innerhalb eines festen Volumens als Kontinuum, d. h. nicht-atomistisch, so lassen sich die Prinzipien der Massen-, Impuls- und Energieerhaltung differentiell durch die folgenden Gleichungen beschreiben (Normand et al., 1977) :

1. Massenerhaltung (Kontinuitätsgleichung)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \underline{\nabla}^T(\rho \underline{v}) = 0 \quad (2.1)$$

2. Impulserhaltung (3. Newton'sches Gesetz)

$$\frac{D}{Dt}(\rho \underline{v}) = \rho \underline{F} - \underline{\nabla} p + \underline{\nabla}^T \underline{\sigma} \quad (2.2)$$

3. Energieerhaltung

$$\rho C_v \cdot \frac{DT}{Dt} + T \frac{\partial p}{\partial T} |_{\rho} \cdot \underline{\nabla}^T \underline{v} = \underline{\nabla}^T(\lambda \underline{\nabla} T) + \frac{1}{2} \underline{\sigma} \cdot \underline{\dot{\varepsilon}} + Q \quad (2.3)$$

Die auftretenden Symbole haben folgende Bedeutung :

ρ : Dichte

$$\underline{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right)^T$$

$\underline{v} = (v_1, v_2, v_3)^T$: Geschwindigkeit

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \underline{v}^T \underline{\nabla} : \text{konvektive Zeitableitung}$$

F : Summe der äusseren Volumenkräfte pro Volumeneinheit

p : Druck

$\underline{\sigma}$: zäher Spannungstensor

2.1 Die hydrodynamischen Grundgleichungen

C_v : spezifische Waerme bei konstantem Volumen

T : Temperatur

λ : Waermeleitfaehigkeit

$\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}$: Tensor der Dehnungsrate, $\varepsilon_{ik} = \frac{\partial x_i}{\partial x_k} + \frac{\partial x_k}{\partial x_i}$, $(x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$

Q : interne Waermeproduktion pro Volumen- und Zeiteinheit

Der Doppelpunkt $\cdot\cdot$ bezeichnet das doppeltskalare Produkt :

$$\underline{\underline{a}} \cdot\cdot \underline{\underline{b}} = \sum_{i,k=1}^n a_{ik} \cdot b_{ik}.$$

Die Gleichungen (2.1) – (2.3) beschreiben zusammen mit einer thermodynamischen Zustandsgleichung :

$$\rho = \rho(p, T) \tag{2.4}$$

und bestimmten Rand- und Anfangsbedingungen das thermohydrodynamische System vollstaendig.

Die Frage nach Existenz und Eindeutigkeit der Loesungen von (2.1)-(2.3) ist bis heute ungeklaert. Sie stellt sich nach Mayer (1982) wie folgt : Es seien gewisse Rand- und Anfangsbedingungen vorgegeben. Gibt es dann zu jeder Zeit eine eindeutig bestimmte Loesung der Gleichungen, die die Anfangsbedingungen erfuehlt und hinreichend oft stetig differenzierbar, d. h. 'glatt' ist, wenn der Anfangszustand glatt gewesen ist ?

Fuer Systeme, deren Beschreibung auf ein zweidimensionales Problem hinauslaeuft, konnten Existenz und Eindeutigkeit glatter Loesungen bei glatten Anfangsbedingungen fuer alle Zeiten nachgewiesen werden. In dreidimensionalen Systemen existiert zwar zu allen glatten Anfangsbedingungen eine eindeutige glatte Loesung, doch kennt man ihre Existenz nur fuer eine endliche Zeit, die fuer wachsende treibende Kraefte und damit steigende Geschwindigkeiten immer kuerzer wird. Diese Tatsache legte es nahe, das Auftreten von Turbulenz mit der Nichtexistenz bzw. Nichteindeutigkeit von globalen Loesungen der Grundgleichungen in Verbindung zu bringen. Da dieses Bild von der Entstehung der Turbulenz jedoch zumindest auf zweidimensionale Probleme nicht zutreffen kann, gehen alle Ansaetze zu einer allgemeinen Turbulenztheorie davon aus, dass die hydrodynamischen Grundgleichungen auch im turbulenten Bereich ihre Gueltigkeit nicht verlieren.

2 Nichtlineare Dynamik

Schreibt man die Gleichungen (2.2) und (2.3) so um, dass auf der linken Seite nur noch die reinen Zeitableitungen stehen, so wird klar, dass sie auch als Entwicklungsgleichungen für das vierdimensionale Vektorfeld (\underline{v}, T) aufgefasst werden können. Der Raum der Vektorfelder $(\underline{v}(\underline{x}), T(\underline{x}))$ ist jedoch unendlich-dimensional und eine exakte Beschreibung der 'Bahn' eines 'Anfangspunktes' $(\underline{v}_0(\underline{x}), T_0(\underline{x}))$ innerhalb dieses Raumes unmöglich.

Die Untersuchung von einfachen, endlich-dimensionalen Problemen brachte eine Fülle von irregulären Bahnen zutage, die den gleichen Charakter wie turbulente Strömungen haben (Lorenz, 1963; Feigenbaum, 1978). Die Existenz solcher Bahnen wird durch nichtlineare Terme in den Entwicklungsgleichungen ermöglicht. In den Gleichungen (2.2) und (2.3) sind dies die Terme $(\underline{v}^T \nabla) \underline{v}$ und $(\underline{v}^T \nabla) T$. Bei Flüssigkeiten mit temperaturabhängiger Viskosität tritt in Gleichung (2.2) noch der nichtlineare Reibungsterm hinzu, der die Temperatur über die Viskosität mit dem Geschwindigkeitsgradienten koppelt.

2.2 Grundlagen der nichtlinearen Dynamik

2.2.1 Bahnen im Phasenraum

Wie im vorigen Abschnitt ausgeführt, lassen sich die hydrodynamischen Grundgleichungen als Entwicklungsgleichungen eines Systems mit unendlich vielen Freiheitsgraden unter bestimmten Restriktionen (Randbedingungen) auffassen. Wir wollen uns jedoch zunächst mit einfacheren, endlich-dimensionalen Systemen beschäftigen, da sich gezeigt hat, dass die Eigenschaften solcher Systeme auch auf die Hydrodynamik übertragbar sind.

Betrachten wir also ein n -dimensionales System von autonomen Differentialgleichungen 1. Ordnung :

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_n), i = 1, \dots, n. \quad (2.5)$$

Ein System heißt autonom, wenn die f_i nicht explizit von der Zeit abhängen. Ferner sollen die f_i nichtlinear in den x_i sein. Unter der Annahme, dass die f_i in allen Punkten bezüglich aller Argumente stetig differenzierbar sind, besagt das Theorem von Cauchy-Lipschitz, dass zu jedem Punkt \underline{x}_0 eine eindeutige Lösung $\underline{x}(t)$ von (2.5) existiert, mit $\underline{x}(t_0) = \underline{x}_0$.

Diese Lösung beschreibt im n -dimensionalen Phasenraum, der durch die x_i aufgespannt wird, eine Bahnkurve oder Trajektorie (Abb. 2.1). Die Eindeutigkeit der Lösung garantiert, dass durch jeden Punkt des Phasenraumes genau eine Trajektorie verläuft. Diese Trajektorie beschreibt unendlich viele Lösungen, die sich nur durch den Wert von t_0 unterscheiden, da das System (2.5) ja autonom sein soll. Die zeitliche Entwicklung des Systems hängt also nur von der Anfangsbedingung $\underline{x}(t_0)$ und dem stationären Geschwindigkeitsvektorfeld $\dot{\underline{x}}$ ab; die Bahnkurven liegen überall tangential zu diesem Feld. Der Zustand $\underline{x}(t)$ des Systems ergibt sich also aus der Anfangsbedingung \underline{x}_0 zum Zeitpunkt $t=0$ durch Integration :

$$\underline{x}(t) = \underline{F}_t(\underline{x}_0).$$

\underline{F}_t bildet jeden Punkt des Phasenraumes auf einen Punkt des Phasenraumes ab und beschreibt so eine 'Stromung' von Phasenraumpunkten. (Abb. 2.2). Daher wird \underline{F}_t auch als der von den $f_i(x_1, \dots, x_n)$ erzeugte Fluss genannt (Thomae, 1983).

2 Nichtlineare Dynamik

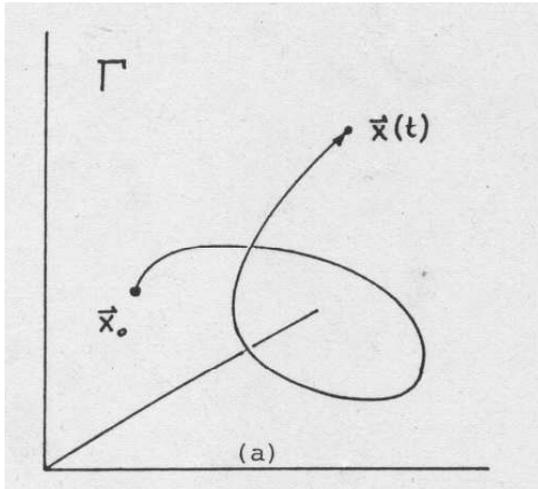


Abb. 2.1 : Bahn eines Punktes im Phasenraum, Trajektorie (aus : Thomae, 1983)

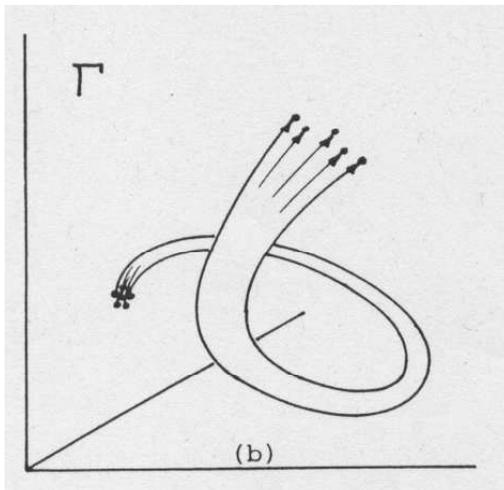


Abb. 2.2 : 'Stromung' von Phasenraumpunkten (aus : Thomae, 1983)

2.2.2 Stabilität

Seien nun $\underline{x}(t)$ und $\underline{y}(t)$ Lösungen von (2.5), die zu einem bestimmten Zeitpunkt t_0 einen infinitesimalen Abstand $\|\underline{x}(t_0) - \underline{y}(t_0)\|$ haben ($\|\cdot\|$ bezeichnet eine beliebige Norm). $\underline{x}(t)$ heisst stabil, wenn fuer alle solche $\underline{y}(t)$ und alle $t > t_0$ der Abstand $\|\underline{x}(t) - \underline{y}(t)\|$ endlich bleibt. Falls zusaetzlich noch gilt :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\underline{x}(t) - \underline{y}(t)\| = 0,$$

so heisst $\underline{x}(t)$ asymptotisch stabil (Normand et al., 1977). Asymptotische Stabilität bedeutet also Stabilität bezüglich infinitesimaler Störungen. Im mathematischen Sinne klingt die Störung erst im Grenzwert $t \rightarrow \infty$ ab, physikalisch gesehen wird das System jedoch innerhalb einer endlichen Relaxationszeit in seinen urspruenglichen Zustand zurueckkehren. Interessiert man sich fuer das asymptotische Verhalten des Systems, so wird man jenen Teil M des Phasenraumes betrachten, der durch den Fluss $\underline{F}(t)$ auf sich selbst abgebildet wird. M wird invariante Mannigfaltigkeit genannt. Ferner wird jener Teil von M interessieren, der asymptotisch stabil ist : Diese Trajektorien nennt man die Attraktoren des Systems. Kennt man ausser den Attraktoren noch die Bassins ihrer Anziehung, d. h. die Teile des Phasenraums, die unter $\underline{F}(t)$ auf die Attraktoren abgebildet werden, so ist das asymptotische Verhalten des Systems zwar vollstaendig bestimmt (Kroll, 1983), doch wird es in der Praxis nicht gelingen, alle Konstanten eines Systems beliebig genau zu messen bzw. genau zu reproduzieren. Die f_i in Gleichung (2.5) werden sich also von Messung zu Messung geringfuegig aendern, und so ist die Frage nach struktureller Stabilität, d. h. Stabilität der topologischen Struktur der Attraktoren gegenueber infinitesimalen Aenderungen der Differentialgleichung von grosser Bedeutung.

2.2.3 Dissipative Systeme

Das Liouville'sche Theorem garantiert fuer Hamiltonsche Systeme die Erhaltung des Phasenraumvolumens (Eilenberger und Kehr, 1983). Hamiltonsche Systeme, sind Systeme, in denen kanonische Variable $\underline{p} = (p_1, \dots, p_n)$, $\underline{q} = (q_1, \dots, q_n)$ und eine Hamiltonfunktion $H(\underline{p}, \underline{q})$ existieren, so dass

$$\frac{\partial \underline{p}}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial \underline{q}}, \quad \frac{\partial \underline{q}}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial \underline{p}}.$$

In dissipativen Systemen, das sind Systeme in denen irgend ein Reibungsmechanismus wirkt, findet man jedoch kontrahierende Fluesse, die das Volumen des Zustndsraumes verkleinern. Seien x_i die n unabhaengigen Variablen, die den Zustndsraum aufspannen. Die zeitliche Ableitung eines beliebigen Volumens ist dann gegeben durch

$$\frac{dV}{dt} = \oint_{S(V)} \underline{\dot{x}} dS = \int_V \operatorname{div}(\underline{\dot{x}}) dx_1 \dots dx_n = \int \sum_{i=1}^n \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_i} dx_1 \dots dx_n < 0. \quad (2.6)$$

$S(V)$ ist die Oberflaeche des Volumens.

Da dies fuer beliebige Volumina gelten soll, folgt

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_i} = \sum \frac{\partial f_i(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i} < 0. \quad (2.7)$$

In dissipativen Systemen wird also jedes Volumen des Phasenraumes asymptotisch auf einen Unterraum mit dem Volumen Null abgebildet, die Dimension von Attraktoren ist also immer geringer als die des Phasenraumes.

2.2.4 Fixpunkte

Die einfachsten invarianten Mannigfaltigkeiten eines Flusses sind die Fixpunkte. In ihnen verschwinden alle f_i auf der rechten Seite von Gleichung (2.5) simultan, sie bilden so punktförmige Trajektorien. Zur Unterscheidung der verschiedenen Fixpunkttypen dient die lineare Stabilitätsanalyse. Angenommen, Gleichung (2.5) hat einen Fixpunkt im Ursprung. Man entwickelt dann die rechte Seite von (2.5) in eine Taylorreihe und erhält

$$\dot{\underline{x}} = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{x} + \underline{\underline{B}}(\underline{x}). \quad (2.8)$$

$\underline{\underline{A}}$ ist eine $(n \times n)$ -Matrix mit konstanten Koeffizienten und $\underline{\underline{B}}(\underline{x})$ eine Potenzreihe in den x_i , die mit mindestens quadratischen Gliedern beginnt. Falls der betrachtete Fixpunkt nicht im Ursprung, sondern bei $\underline{x}_0 \neq 0$ liegt, so erhält man nach einer Koordinatentransformation $\underline{x} \rightarrow \underline{x} - \underline{x}_0$ ebenfalls (2.8).

Da wir uns mit dem asymptotischen Verhalten von Lösungen innerhalb einer kleinen Umgebung vom Fixpunkt beschäftigen wollen, kann \underline{x} in (2.8) als kleine Grösse behandelt werden: die nichtlinearen Terme, die in $\underline{\underline{B}}(\underline{x})$ zusammengefasst sind, können daher i. A. vernachlässigt werden, und es genügt, das vereinfachte System

$$\dot{\underline{x}} = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{x} \quad (2.9)$$

zu betrachten.

Ferner sollen hier nur Systeme mit $\det \underline{\underline{A}} \neq 0$ betrachtet werden, da für $\det \underline{\underline{A}} = 0$ kein isolierter Fixpunkt, sondern ein mindestens eindimensionaler Untervektorraum des Phasenraumes untersucht werden muss. Es ist ausserdem wegen der grösseren Anschaulichkeit zweckmässig, zweidimensionale Systeme zu betrachten und die so gewonnene Anschauung auf höhere Dimensionen zu erweitern.

Das Verhalten von Lösungen nahe des Ursprungs wird durch die Eigenwerte λ_1, λ_2 bestimmt, die man durch Lösung der charakteristischen Gleichung

$$\det \left(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{E}} \right) = 0 \quad (2.10)$$

erhält. $\underline{\underline{E}}$ bezeichnet die Einheitsmatrix. Für $n = 2$ gilt dann

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left[\text{Sp}(\underline{\underline{A}}) \pm \sqrt{\text{Sp}(\underline{\underline{A}})^2 - 4 \det(\underline{\underline{A}})} \right] = \frac{1}{2} \left[\text{Sp}(\underline{\underline{A}}) \pm \sqrt{D} \right]. \quad (2.11)$$

Die Spur von $\underline{\underline{A}}$ wird mit $\text{Sp}(\underline{\underline{A}}) = \sum_i A_{ii}$ bezeichnet.

1. Fall: $D > 0$

2 Nichtlineare Dynamik

Beide Eigenwerte sind reell, $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Dann ist A diagonalisierbar und man erhaelt nach einer geeigneten Aehnlichkeitstransformation

$$\dot{u} = \lambda_1 u, \quad \dot{v} = \lambda_2 v \quad (2.12)$$

mit den Loesungen :

$$u = u_0 e^{\lambda_1 t}, \quad v = v_0 e^{\lambda_2 t}. \quad (2.13)$$

1.a Beide Eigenwerte haben gleiches Vorzeichen, alle Loesungen von (2.5) in der Umgebung des Ursprungs naehern sich entweder fuer $t \rightarrow \infty$ ($\lambda_i < 0$) oder fuer $t \rightarrow -\infty$ ($\lambda_i > 0$) dem Ursprung. Man erhaelt einen stabilen bzw. instabilen Knoten (Abb. 2.3).

1.b Die Eigenwerte haben verschiedene Vorzeichen. Dieser hyperbolische Fixpunkt hat 2 invariante Mannigfaltigkeiten, w_s und w_u (Abb. 2.4), die fuer $t \rightarrow \infty$ oder $t \rightarrow -\infty$ auf den Fixpunkt abgebildet werden. Man nennt diesen Fixpunkt auch Sattelpunkt. Der Sattelpunkt hat zwar eine stabile 'Richtung', die durch w_s festgelegt ist, ist aber prinzipiell instabil, da kleine Auslenkungen aus der Ruhelage in realen Systemen nicht in einer bevorzugten Richtung auftreten. Stabilitaet bedeutet also grundsatzlich Stabilitaet bezueglich beliebiger Stoerungen.

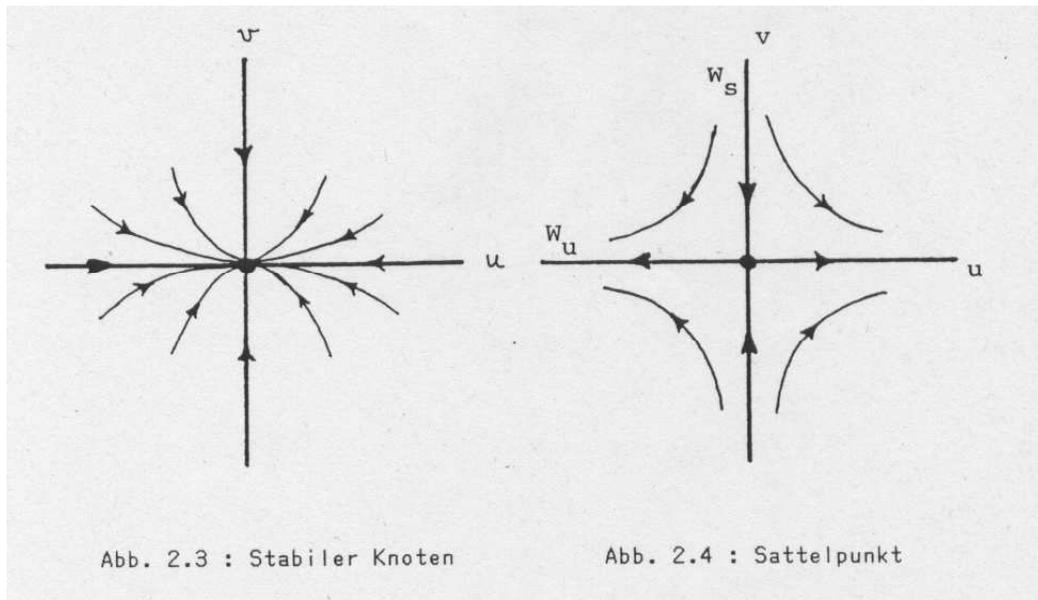


Abb. 2.3 : Stabiler Knoten

Abb. 2.4 : Sattelpunkt

2. Fall : $D = 0$, $\lambda_1 = \lambda_2$, reell

Hier gibt es 2 Moeglichkeiten : falls A diagonalisierbar ist, erhaelt man wiederum (2.12) mit den Loesungen (2.13) und den im 1. Fall eroerterten Varianten. Allerdings gilt hier immer $u(t) = (u_0/v_0) \cdot v(t)$ und die Trajektorien sind vom Ursprung ausgehende Geraden (Abb. 2.5) : Der Sattelpunkt tritt hier nicht auf. Falls A nicht diagonalisierbar ist, erhaelt man anstatt (2.12)

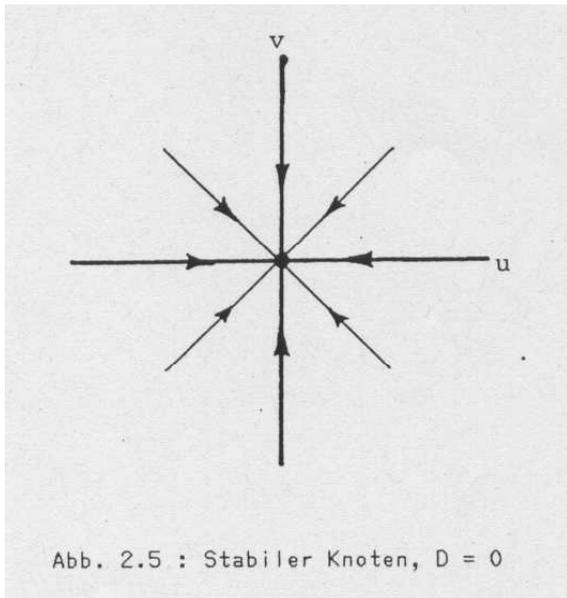
$$\dot{u} = \lambda u + v, \quad \dot{v} = \lambda v \quad (2.14)$$

mit den Loesungen

$$\mathbf{u} = (\mathbf{u}_0 + \mathbf{v}_0 t) \cdot e^{\lambda t}$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 \cdot e^{\lambda t}$$

Auch hier erhaelt man fuer $\lambda < 0$ ($\lambda > 0$) wieder einen stabilen (instabilen) Knoten.



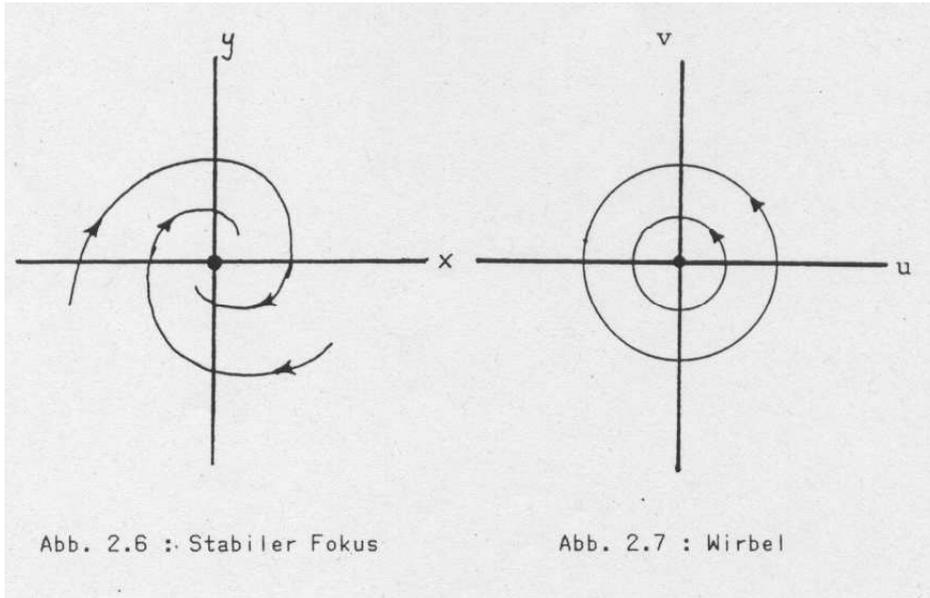
3. Fall : $D < 0$

λ_1 und λ_2 sind dann komplex konjugierte Paare und es gelten wieder (2.12) und (2.13). Mit $u = r \cdot \exp(i\varphi)$ und $v = r \cdot \exp(-i\varphi)$ gilt

$$\dot{r} = \operatorname{Re}(\lambda_i) \cdot r, \quad \dot{\varphi} = \operatorname{Im}(\lambda_i). \quad (2.15)$$

Fuer $\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0$ (> 0) ist der Ursprung ein stabiler (instabiler) Fokus. Die Trajektorien sind Spiralen um den Ursprung (Abb. 2.6). Fuer $\operatorname{Re}(\lambda_i) = 0$ ist der Fixpunkt marginal stabil : Die Trajektorien bilden geschlossene Kreise um den Ursprung (Abb. 2.7). Solche elliptische Fixpunkte oder Wirbel sind jedoch nicht strukturell stabil. Eine beliebig kleine Aenderung in den Entwicklungsgleichungen zerstoert die Fixpunkteigenschaften und laesst den Wirbel in einen schwachen Fokus uebergehen. Die Eigenschaften aller anderen Fixpunkte werden innerhalb einer kleinen Umgebung um den Ursprung nicht von der Nichtlinearitaet $\underline{B}(\underline{x})$ in (2.8) beeinflusst und sind strukturell stabil (Kroll, 1983).

2 Nichtlineare Dynamik



Eine Zusammenfassung der verschiedenen Fixpunktarten ist Abb. 2.8 zu entnehmen. Die Uebertragung der Fixpunkteigenschaften auf hoehere Dimensionen duerfte bei diagonalisierbaren Matrizen $\underline{\underline{A}}$ keine Schwierigkeiten bereiten. Es existieren hier lediglich mehrere anziehende bzw. abstossende Richtungen.

stabiler Knoten 	stabiler Fokus 	Sattel (instabil) 
$\lambda_1, \lambda_2 \text{ reel} < 0$	$\lambda_i \text{ Komplex; Re} < 0$	$\lambda_1, \lambda_2 \text{ reel; sign} \neq$
instabiler Knoten 	instabiler Fokus 	Wirbel (marginal) 
$\lambda_1, \lambda_2 \text{ reel} > 0$	$\lambda_i \text{ Komplex; Re} > 0$	$\lambda_i \text{ rein imaginär}$

Abb. 2.8 : Zusammenstellung der verschiedenen Fixpunktarten

Die Eigenwerte der Matrix \underline{A} heissen Liapunov-Exponenten des Systems im Fixpunkt. Sie geben an, wie stark ein Intervall in der Naehе des Ursprungs ausgedehnt bzw. komprimiert wird. Im Fixpunkt selbst gilt

$$\sum_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_i} = \text{Sp}(\underline{A}) = \sum_i \lambda_i. \quad (2.16)$$

Da fuer dissipative Systeme $\frac{dV}{dt} < 0$ gelten muss, folgt zusammen mit (2.7)

$$\sum_i \lambda_i = \sum_i \text{Re}(\lambda_i) < 0.$$

Ein dissipatives System kann also nur stabile Knoten und Foci sowie Sattelpunkte haben, im Gegensatz zu Hamiltonschen Systemen, in denen nur parabolische und hyperbolische Fixpunkte auftreten.

2.2.5 Grenzzyklen

Ausser Fixpunkten existieren auch noch andere Attraktoren, wie das folgende Beispiel (Kroll, 1983) zeigt.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (\mu - r^2) \cdot x - \omega_0 \cdot y \\ \dot{y} &= \omega_0 \cdot x + (\mu - r^2) \cdot y\end{aligned}\tag{2.17}$$

$$r^2 = x^2 + y^2$$

Man sieht sofort, dass der Ursprung ein Fixpunkt ist und kann nun (2.17) um (0,0) linearisieren :

$$\dot{\underline{x}} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu & -\omega_0 \\ \omega_0 & \mu \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underline{A} \cdot \underline{x}$$

Die Eigenwerte von \underline{A} sind dann

$$\lambda_{1,2} = \mu \pm i\omega_0.$$

Der Fixpunkt ist stabil fuer $\mu < 0$ und instabil fuer $\mu > 0$. Die Gleichungen (2.17) lauten in Polarkoordinaten :

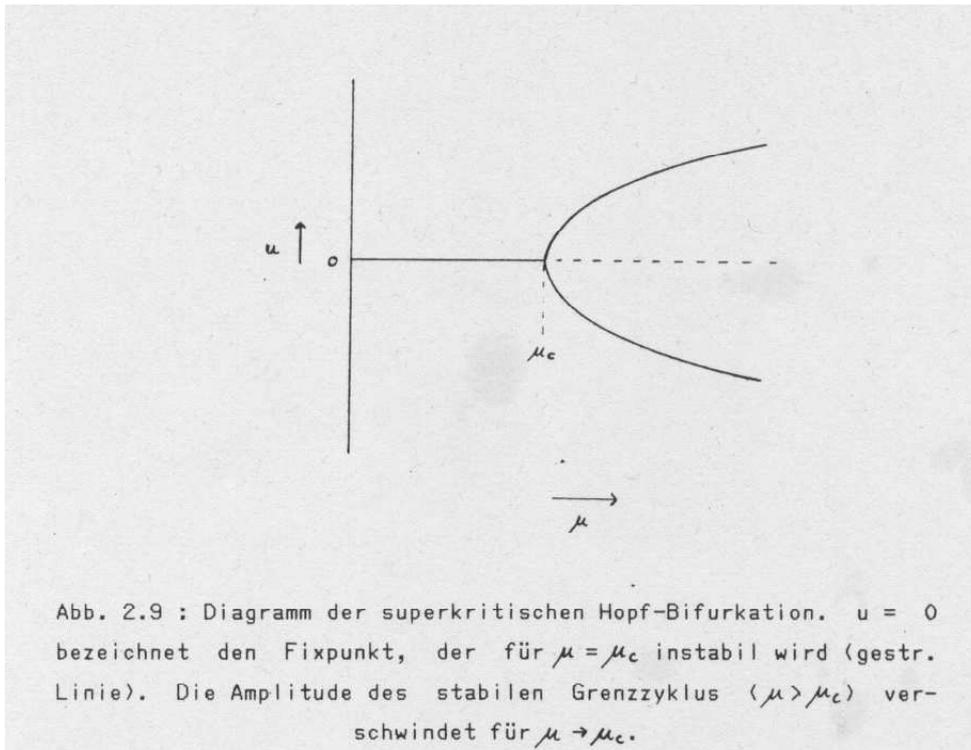
$$\begin{aligned}\dot{r} &= (\mu - r^2) r \\ \dot{\varphi} &= \omega_0\end{aligned}\tag{2.18}$$

Es ist klar, dass die Bahn mit der Periode $T = 2\pi/\omega_0$ auf einem Kreis um den Ursprung mit Radius $r_0 = \sqrt{\mu}$ die Entwicklungsgleichungen fuer positive μ erfuehlt. Die Linearisierung von (2.18) ergibt

$$\dot{r} = -2r_0^2 (r - r_0).$$

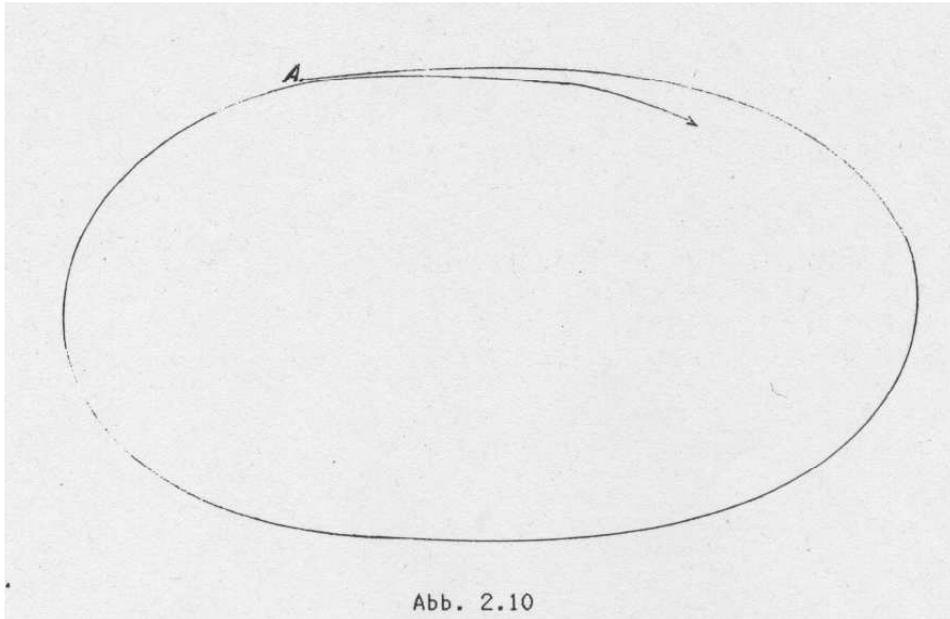
Der einzige hier auftretende Liapunov-Exponent : $\lambda = -2r_0^2$ ist also negativ und die geschlossene Trajektorie ist stabil. Solche Attraktoren, man nennt sie Grenzzyklen, treten nur in dissipativen Systemen auf und spielen eine grosse Rolle fuer den Uebergang zu chaotischen Bewegungen (Kroll, 1983). Sprunghafte Aenderungen der Fixpunkteigenschaften bei der Veraenderung eines gewissen Parameters nennt man Bifurkationen. Die hier aufgetretene superkritische Hopf-Bifurkation ist dadurch charakterisiert, dass zwei

komplex konjugierte Eigenwerte eines Fixpunktes die imaginäre Achse überqueren und ein Grenzzyklus stabil wird (Abb. 2.9).



Nach dem Satz von Poincaré-Bendixon sind Grenzzyklen und Fixpunkte (wenn man die 'Punkte' $+\infty$ und $-\infty$ zulässt) die einzig möglichen Attraktoren in zweidimensionalen kontinuierlichen Systemen (Eilenberger und Kehr, 1982). Dieser Satz wird plausibel, wenn man bedenkt, dass Trajektorien sich nicht selbst oder untereinander schneiden dürfen. Dies führt dazu, dass eine Bahn, die ein bestimmtes Gebiet verlassen hat, einem Punkt A des Gebietes nur einmal beliebig nahe kommen kann, danach hat sie sich selbst ausgesperrt (Abb. 2.10).

2 Nichtlineare Dynamik



In drei Dimensionen kann eine Bahn einem beliebigen Punkt durch Ausweichen in die 3. Dimension immer wieder beliebig nahe kommen. Chaotische Bewegungen sind hier ebenso wenig möglich wie in diskreten eindimensionalen Systemen, die durch rekursive Gleichungen der Form :

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

beschrieben werden.

Einige Eigenschaften solcher Systeme lassen sich auf bestimmte zeitabhängige Strömungen in der Hydrodynamik übertragen (Maurer und Libchaber, 1979, Gollub und Benson, 1980). Deshalb soll das wohl bekannteste diskrete eindimensionale System, die von Feigenbaum (1978, 1979) untersuchte logistische Gleichung, Gegenstand des nächsten Abschnitts sein.

2.3 Eindimensionale diskrete Systeme

Wie schon erwahnt, untersuchte Feigenbaum (1978, 1979) die logistische Gleichung, eine stark vereinfachte Entwicklungsgleichung aus der Populationsdynamik :

$$x_{n+1} = f(x_n) = 1 - \mu x_n^2 \quad (2.19)$$

Allgemein also : $x_{n+m} = f(f(\dots f(x_n) \dots)) = f^m(x_n)$. Die Fixpunkte von (2.19) ergeben sich aus

$$x_{n+1} = x_n \rightarrow \mu \cdot x_F^2 + x_F - 1 = 0$$

zu

$$x_{F1,2} = \frac{1}{2\mu} \cdot \left(-1 \pm \sqrt{4\mu + 1} \right).$$

Um die Stabilitaet eines Fixpunktes zu untersuchen, betrachtet man kleine Abweichungen $|x - x_F| \ll 1$ und macht analog zum kontinuierlichen Fall den Ansatz

$$|f^n(x) - f^n(x_F)| = |f^n(x) - x_F| \sim e^{\lambda n} \cdot |x - x_F|. \quad (2.20)$$

Fuer kleine $|x - x_F|$ gilt

$$f^n(x) - f^n(x_F) = (f^n(x_F))' \cdot (x - x_F).$$

Durch n-malige Anwendung der Kettenregel erhaelt man

$$(f^n(x_0))' = f'(x_{n-1}) \cdot f'(x_{n-2}) \cdot \dots \cdot f'(x_0), \quad x_i = f^i(x_0)$$

und damit

$$|f^n(x) - x_F| \sim |f'(x_F)|^n \cdot |x - x_F|. \quad (2.21)$$

Durch Vergleich von (2.20) mit (2.21) erhaelt man den Liapunov-Exponenten zum Fixpunkt x_F :

$$\lambda = \ln |f'(x_F)|$$

Der Fixpunkt ist stabil fuer $\lambda < 0$ d. h. fuer $|f'(x_F)| < 1$ und instabil fuer $\lambda > 0$ ($|f'(x_F)| > 1$). Das ist ein wohlbekanntes Ergebnis aus den Stabilitaetskriterien fuer iterative numerische Verfahren. Die Anwendung auf (2.19) ergibt

$$f'(x_{F1}) = f'(x_S) = 1 - \sqrt{4\mu + 1}$$

$$f'(x_{F2}) = f'(x_I) = 1 + \sqrt{4\mu + 1}.$$

Der Fixpunkt x_I ist immer instabil, $x_{F1} = x_S$ stabil fuer $0 < \mu < 0.75$, sein Anziehungsbereich ist das ganze Intervall $[1 - \mu, 1]$. Um das Verhalten der Gleichung (2.19) fuer $\mu > 0.75$ zu verstehen, ist es zweckmaessig, sich die zweite Iterierte $f^2(x)$ anzusehen :

$$f^2(x) = 1 - \mu + 2\mu^2 x^2 - \mu^3 x^4.$$

2 Nichtlineare Dynamik

Fuer $\mu < 0.75$ hat f^2 natuerlich den gleichen Fixpunkt x_F wie auch f (Abb. 2.11a). Es gilt nun

$$(f^2(x_S))'' = f''(x_S) \cdot f(x_S) \cdot (1 + f'(x_S)).$$

Fuer den kritischen Wert $\mu = 0.75$ wird $f'(x_S) = -1$, also $(f^2(x_S))'' = 0$ (Abb. 2.11b). Der Fixpunkt x_S wird instabil und gleichzeitig Wendepunkt von f^2 . Fuer $\mu > 0.75$ hat f^2 drei Fixpunkte : zwei stabile x_1 und x_2 , die fuer wachsendes μ stetig aus dem jetzt instabilen x_S hervorgehen (Abb. 2.11c). Ferner gilt fuer $i = 1, 2$

$$f^2(f(x_i)) = f(f^2(x_i)) = f(x_i).$$

Die beiden Punkte $f(x_i)$ sind also Fixpunkte von f^2 , nicht aber von f . Daraus folgt

$$f(x_1) = x_2, \quad f(x_2) = x_1.$$

Die zweite Iterierte f^2 hat also zwei stabile Fixpunkte, waehrend die Abbildung f eine stabile Bahn der Periode 2 hat. Der Uebergang bei $\mu = 0.75$ ist ein Beispiel fuer eine Gabelbifurkation ('pitchfork bifurcation') oder subharmonische Bifurkation, das diskrete Analogon zur superkritischen Hopf-Bifurkation.

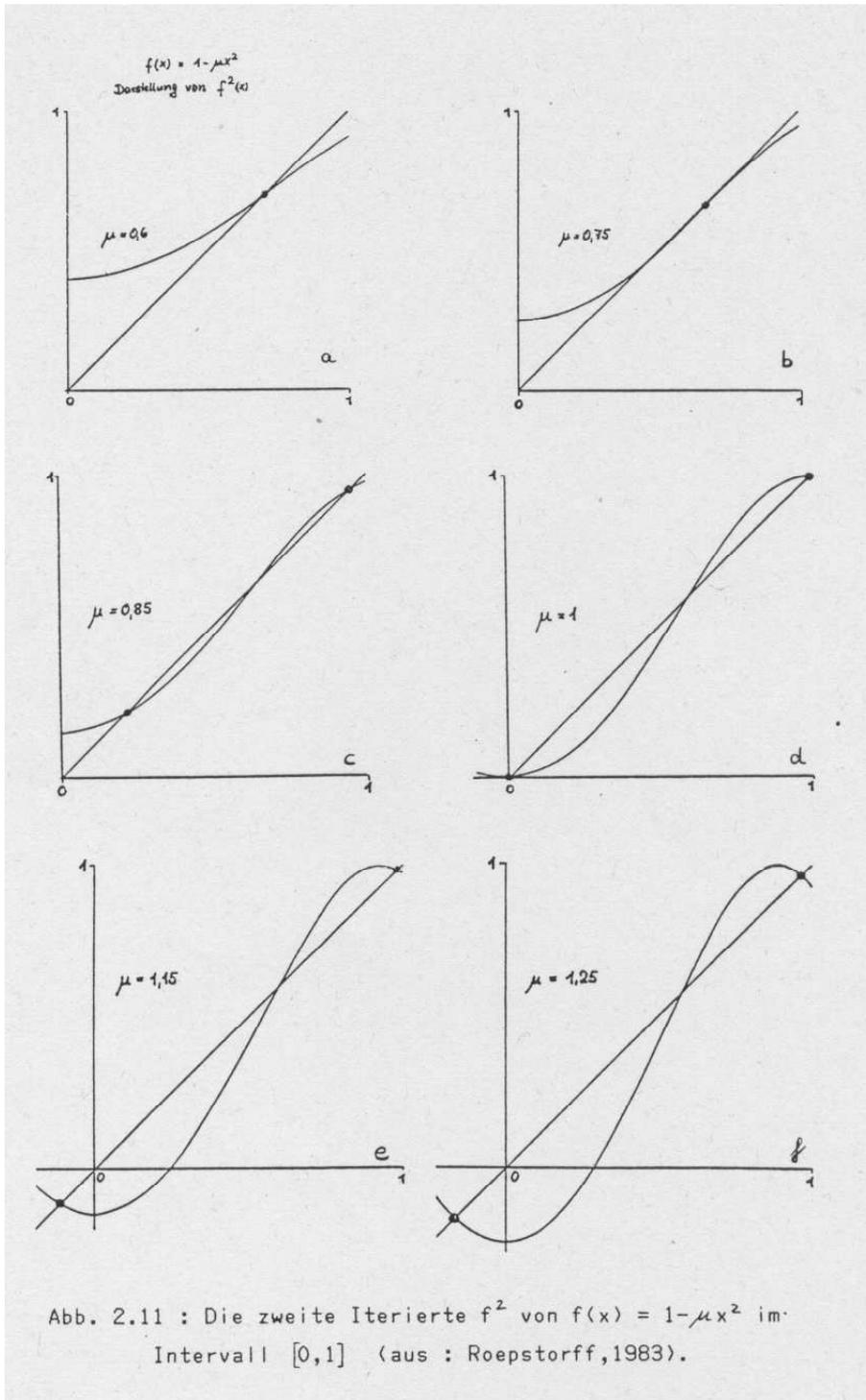
Die Stabilitaet der Periode 2 ist gewaehrleistet, solange

$$\left| (f^2(x_1))' \right| = |f'(x_1) \cdot f'(x_2)| = \left| (f^2(x_2))' \right| < 1.$$

Fuer wachsendes μ ruecken x_1 und x_2 immer weiter auseinander, bis schliesslich bei $\mu = 1$ gilt : $x_1 = 0$ und $x_2 = 1$ (Abb. 2.11d). Die Steigungen betragen

$$(f^2(x_1))' = (f^2(x_2))' = 0 \rightarrow \lambda_{1,2} = -\infty.$$

Die beiden Fixpunkte haben also maximale 'Anziehungskraft', man sagt, die Periode 2 ist superstabil. Waechst μ nun weiter, so werden die Ableitungen in den Fixpunkten negativ (Abb. 2.11e), bis schliesslich bei $\mu = 1.25$ der kritische Wert -1 erreicht ist (Abb. 2.11f) und die Periode 2 instabil wird. (Beide Fixpunkte von f werden gleichzeitig instabil, da $(f^2(x_1))' = (f^2(x_2))'$). An ihre Stelle tritt die stabile Periode 4, d. h. die 4. Iterierte f^4 hat 4 stabile Fixpunkte. Bei weiterer Steigerung des Parameters wird diese Periode zunaechst wiederum superstabil, dann instabil um der stabilen Periode 8 Platz zu machen. Diese Periodenverdopplung durch subharmonische Bifurkationen setzen sich immer weiter fort, bis schliesslich bei einem gewissen Parameterwert die 'Periode ∞ ' auftritt, die Bewegung wird aperiodisch und somit chaotisch.



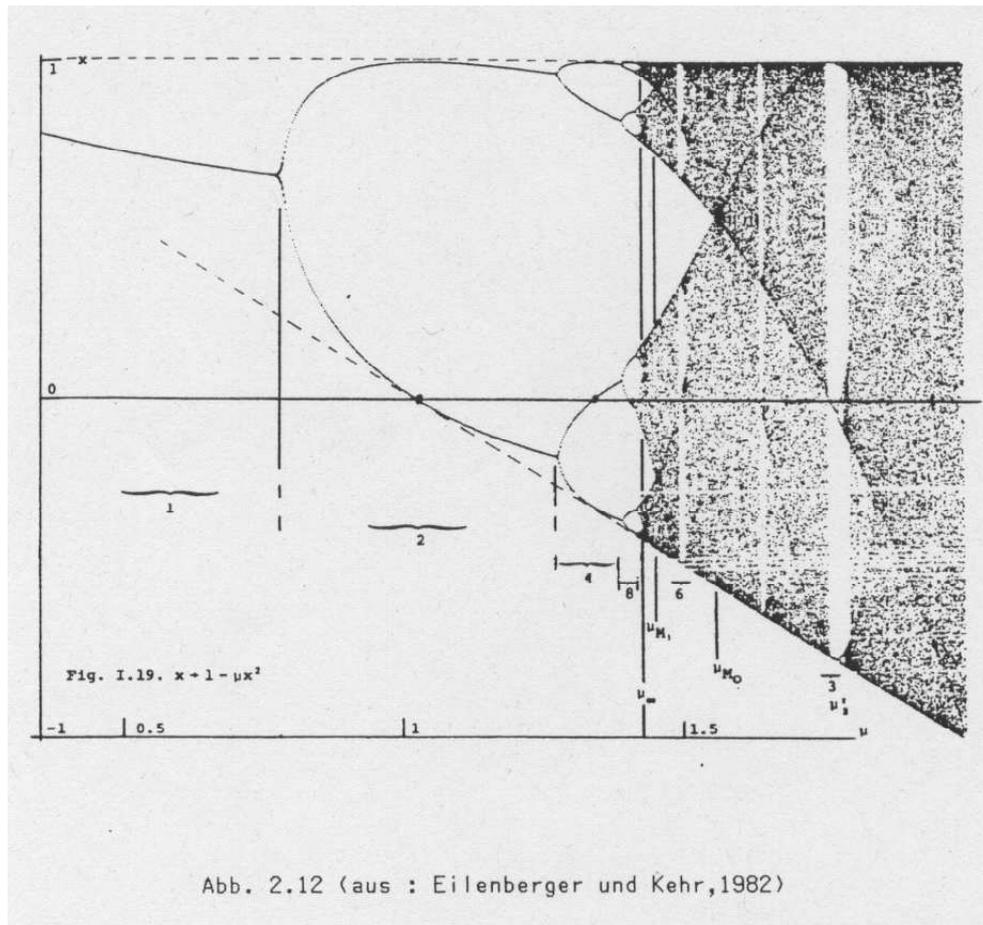
Bis zu diesem Punkt wirkt die Situation leicht ueberschaubar, die Entwicklung des eindimensionalen diskreten Systems von stationaeren zu chaotischen Bewegungen scheint klar. Doch jenseits des Parameters μ_∞ werden die Verhaeltnisse komplizierter, den be-

2 Nichtlineare Dynamik

sten Ueberblick verschafft man sich durch ein Coputereperiment :

1. Man waehle m verschiedene Werte des Parameters μ , die das Intervall $[0, 2]$ aequidistant zerlegen.
2. Fuer jeden Wert von μ bestimme man die folgende Bahn : $\underline{x} = (0, 1, \dots, x_n, \dots, x_N, \dots)$ und trage vertikal uebereinander die Punkte x_n bis x_N in Abhaengigkeit vom Parameter μ auf. Dabei sollte n so gross sein, dass transiente Punkte nicht mitgezeichnet werden, da ja das asymptotische Verhalten interessiert.

Das Ergebnis eines solchen Experiments zeigt Abb. 2.12.



Im chaotischen Bereich erkennt man deutlich die Fortsetzungen einiger Zweige der Bifurkationskaskade. Es sind Bilder des Randes $x = 0$ unter einer bestimmten Iterierten $f_\mu^p(x)$. Fuer ein festes p erhaelt man durch $f_\mu^p(0) = x$ einen funktionalen Zusammenhang zwischen μ und x . Ueberall dort, wo die Funktion $f_\mu^p(0)$ die Gerade $x = 0$ schneidet, existiert eine superstabile Periode p . Man erkennt dies auch daran, dass in der Umgebung solcher Punkte 'Fenster' im Nebel des Chaos auftauchen. Innerhalb dieser Fenster geschieht das gleiche wie im Bereich $\mu < \mu_\infty$: Die superstabile Periode p wird mit wachsendem μ instabil, die stabile Periode $2p$ taucht auf, wird ihrerseits super- und instabil usw. . In Abb.

2.12 ist noch deutlich die erste Bifurkation der Periode 3 zu erkennen. Eine Analyse der Verhältnisse mit den Mitteln der symbolischen Dynamik (Roepstorff, 1983; Thomae, 1983) bringt folgende Ergebnisse :

1. Die Anzahl der Fenster einer stabilen Periode p wächst exponentiell mit p .
2. Es existiert kein noch so kleines μ -Interall, in dem kein Fenster aufzufinden wäre (ein erstes Beispiel für die später noch vorzustellenden Cantormengen).
3. Jedes Fenster ist eine Miniaturabbildung des Bereiches $\mu < \mu_\infty$, die Bifurkationskaskade ist in jedem noch so engen Fenster aufzufinden (s. Bemerkung zu 2).

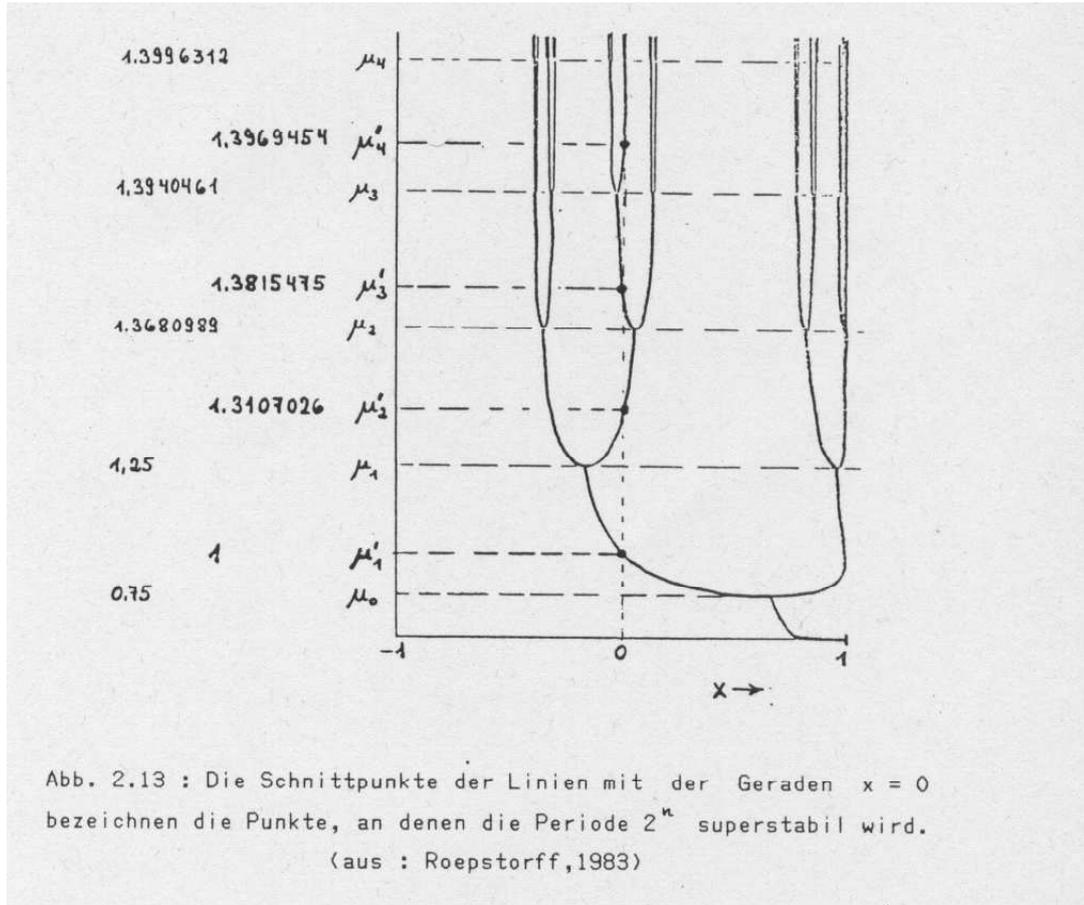
Feigenbaums Untersuchungen im Bereich $\mu < \mu_\infty$ ergaben, dass die Parameterwerte μ_n , bei denen die n -te Bifurkation auftritt, ein geometrisches Abstandsgesetz befolgen. Das gleiche Gesetz gilt für die Werte μ'_n , bei denen die Periode 2^n superstabil wird :

$$\mu_n - \mu_{n-1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} a \cdot \delta^{-n}$$

$$\mu'_n - \mu'_{n-1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} b \cdot \delta^{-n}.$$

Besonders deutlich wird das in Abb. 2.13 mit logarithmischer μ -Achse.

2 Nichtlineare Dynamik



n	μ'_n	Differenz	Quotient
1	1		
2	1,310702641	0,3107026413	4,38568
3	1,381547484	0,0708448430	4,60095
4	1,396945360	0,0153978754	4,65513
5	1,400253081	0,0033077215	4,66611
6	1,400961963	0,0007088819	4,66855
7	1,40111380492	0,0001518418	4,66906
8	1,40114632580	0,00003252088	4,66920 = δ
9	1,40115329078	0,00000696498	

Aitken-Extrap.
↓
∞ 1,401155189 = μ_c

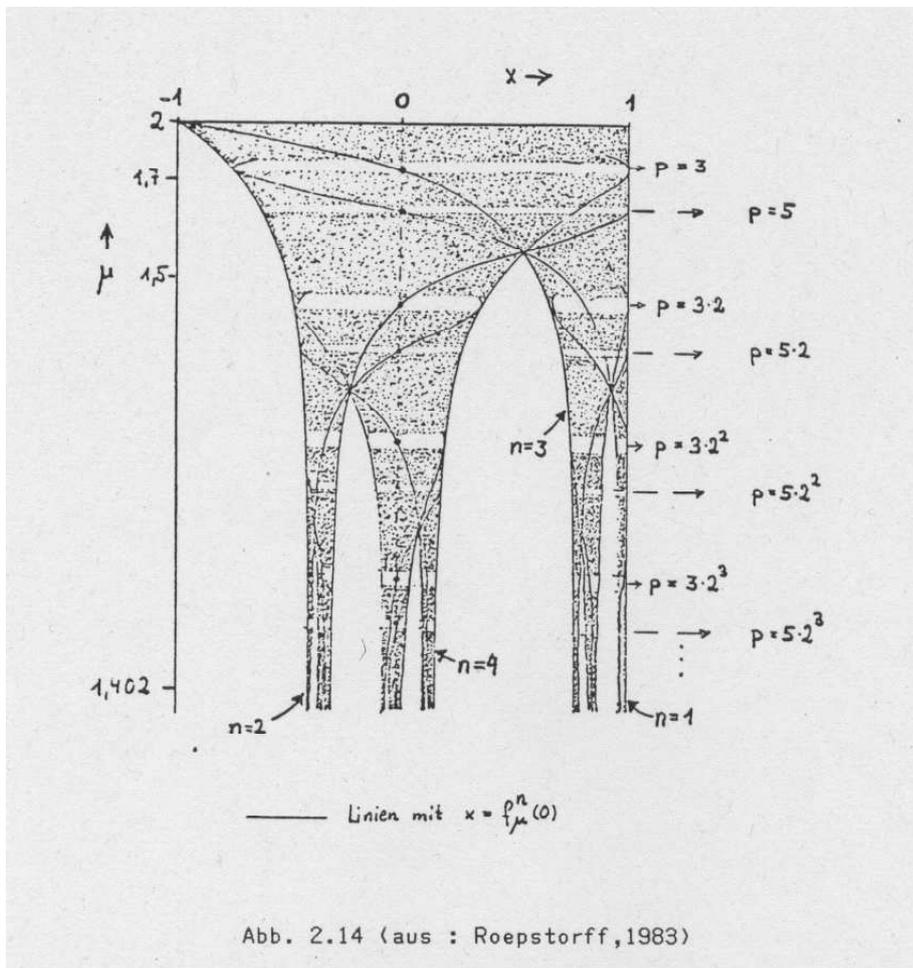
Tabelle 2.1 (aus : Roepstorff,1983)

Tabelle 2.1 kann man folgendes Ergebnis entnehmen :

$$\delta = 4.66920 \dots$$

$$\mu_\infty = 1.401155189 \dots$$

Das gleiche Abstandsgesetz findet man im chaotischen Bereich fuer das Auftreten des Fensters der stabilen Periode $p \cdot 2^n$. In Abb. 2.14 ist die vertikale Achse logarithmisch in $\mu - \mu_\infty$. Sie zeigt konstante Abstaende fuer das Auftreten der Fenster der Perioden $p = 3 \cdot 2^n$ und $p = 5 \cdot 2^n$. In jedem dieser Fenster finden wiederum subharmonische Bifurkationen nach dem gleichen Abstandsgesetz statt, die Feigenbaumkonstante δ laesst sich in solchen Diagrammen unendlich oft wiederfinden.



2 Nichtlineare Dynamik

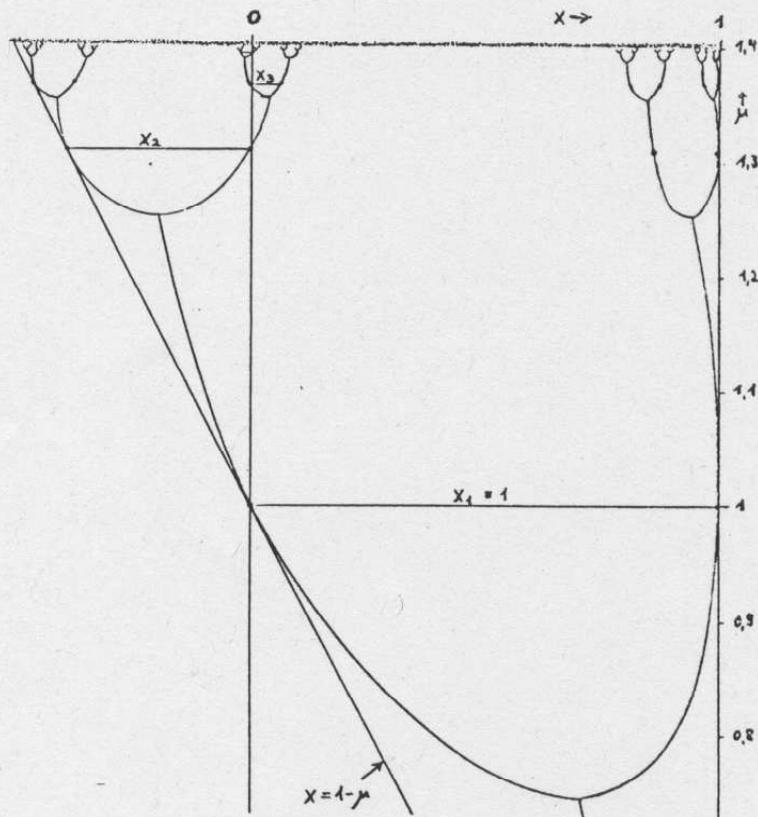


Abb. 2.15 (aus : Roepstorff,1983)

n	x_n	Quotient
1	1	-0,3107
2	-0,3107026413	-0,3807
3	0,1182915272	-0,3956
4	-0,0467902147	-0,3987
5	0,0186546714	-0,3994
6	-0,0074498277	-0,3995
7	0,0029761805	

Tabelle 2.2 (aus : Roepstorff,1983)

Ebenso wie in μ -Richtung existiert ein Skalenverhalten in x -Richtung. Dazu betrachtet man das Bifurkationsschema der Periode 1 und definiert den Wert x_n als die Breite der Bifurkationsgabel auf Hoehe der superstabilen Periode 2^n (Abb. 2.15). Die Folge der x_n konvergiert gegen Null und Tab. 2.2 zeigt :

$$x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} k \cdot \lambda^n, \lambda = -0.3995 \dots$$

Die Universalitaet der Konstanten δ und λ gilt fuer alle Funktionen mit parabolischem Maximum, reicht aber wahrscheinlich noch sehr viel weiter. Sie gilt vermutlich fuer alle zweimal stetig differenzierbaren Funktionen, die ueberhaupt eine subharmonische Bifurkation zeigen (Roepstorff, 1983). Auch in vielen quasi-eindimensionalen Systemen konnten die Konstanten schon nachgewiesen werden (Manneville und Pomeau, 1980).

Die einzelnen Fenster schliessen sich also durch subharmonische Bifurkationen. Aber wie oeffnet sich ein Fenster, wie entsteht eine stabile Periode aus dem Chaos? Als Beispiel betrachte man die Periode 3. Abb. 2.16 zeigt einen Ausschnitt der Funktion $f^3(x)$ fuer $\mu > \mu_3 = 1.7498$. f^3 hat 3 stabile Fixpunkte, jedoch, wie der Ausschnitt zeigt, auch 3 instabile in deren Naehel. Es genuegt, ein solches Paar zu betrachten (Kehr, 1983). Verringert man den Parameter μ , so wandern die beiden Fixpunkte aufeinander zu und gehen schliesslich fuer $\mu = \mu_3$ stetig ineinander ueber. Abb. 2.17 zeigt die Verhaeltnisse fuer $\mu < \mu_3$. Die Fixpunkte existieren nicht mehr, jedoch wird ein Bahnpunkt, der in die Naehel der ehemaligen Fixpunkte geraet, dort eine laengere Zeit verweilen, bis er wieder andere Bereiche aufsuchen kann. Die Abbildungen 2.18 und 2.19 zeigen Bahnpunkte der logistischen Gleichung fuer $\mu > \mu_3$ sowie $\mu < \mu_3$. Der Uebergang vom Chaos zur stabilen verlauft ueber Intermittenz, die hierfuer verantwortliche Bifurkation nennt man Tangentenbifurkation. Ihr Analogon in kontinuierlichen Systemen ist die Sattel-Knoten-Bifurkation (saddle-node-bifurcation) : Ein stabiler und ein instabiler Grenzzzyklus wandern aufeinander zu und vernichten sich gegenseitig (Eckmann, 1981). Diese Bifurkation wurde erstmals von Manneville und Pomeau (1980) bei ihren Untersuchungen des Lorenz-Systems (Lorenz, 1963) entdeckt. Das Lorenz-System ist kontinuierlich in 3 Dimensionen und zeigt chaotisches Verhalten. Es soll im naechsten Abschnitt vorgestellt werden.

2 Nichtlineare Dynamik

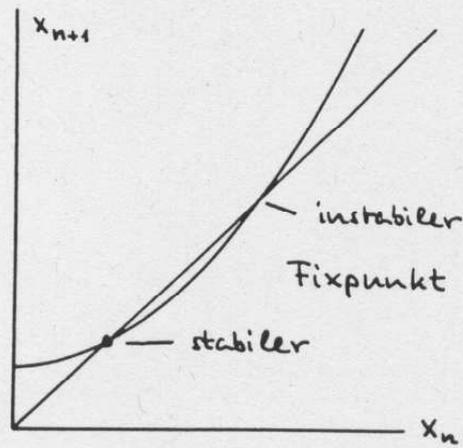


Abb. 2.16 : Ausschnitt der 3. Iterierten $f^3(x)$, $\mu > \mu_3$.
(aus : Kehr, 1983)

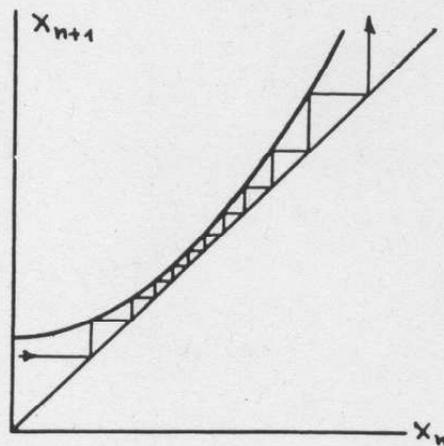


Abb. 2.17 : Wie oben, jedoch für $\mu < \mu_3$ (aus : Kehr, 1983).

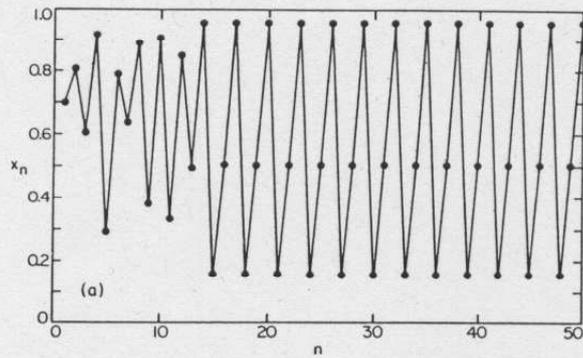


Abb. 2.18 : Bahnpunkte der logistischen Gleichung (nicht dreifach iteriert) für $\mu > \mu_3$ (aus : Kehr,1983).

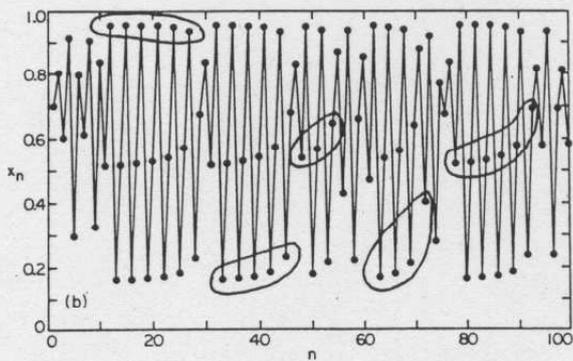


Abb. 2.19 : Wie oben, jedoch $\mu < \mu_3$ (aus : Kehr,1983).

2.4 Kontinuierliche Dynamik in drei Dimensionen

2.4.1 Das Rayleigh-Benard-Problem

Nach der Behandlung eindimensionaler diskreter Systeme sollen nun wieder hydrodynamische Probleme, insbesondere die Rayleigh-Benard-Instabilität untersucht werden. Man betrachte eine horizontale Flüssigkeitsschicht der Dicke H deren horizontale Ausdehnung L sehr gross gegen H ist, $L \gg H$, im Schwerfeld ($\underline{F} = -g \cdot \underline{e}_z$). Die Temperatur an der Unterseite sei $T_{(z=0)} = T_1$, die an der Oberseite $T_{(z=H)} = T_0 < T_1$. Bei nicht allzu grossen Temperaturdifferenzen $\Delta T = T_1 - T_0$ sind einige nützliche Vereinfachungen der Hydrodynamischen Grundgleichungen möglich. Die Gleichungen (2.1)-(2.3) seien hier noch einmal aufgeführt.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \underline{\nabla}^T(\rho \underline{v}) = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{D}{Dt}(\rho \underline{v}) = \rho \underline{F} - \underline{\nabla} p + \underline{\nabla}^T \underline{\underline{\sigma}} \quad (2.2)$$

$$\rho C_v \frac{DT}{Dt} + T \frac{\partial p}{\partial T} \Big|_{\rho} \underline{\nabla}^T \underline{v} = \underline{\nabla}^T(\lambda \underline{\nabla} T) + \frac{1}{2} \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} + Q \quad (2.3)$$

Da fuer die meisten Flüssigkeiten die isotherme Kompressibilität um Grossenordnungen kleiner ist als der thermische Ausdehnungskoeffizient (Normand et al., 1977), kann man fuer nicht allzu grosse ΔT die linearisierte Zustandsgleichung

$$\rho(p, T) = \rho(T) = \rho_0(1 - \alpha(T - T_0))$$

α : thermischer Ausdehnungskoeffizient, $\rho_0 = \rho(T_0)$

verwenden. Die maximale relative Dichtedifferenz innerhalb der Schicht betraegt dann

$$\frac{|\Delta \rho|}{\rho_0} = \alpha \Delta T.$$

Der typische Bereich fuer α liegt bei $10^{-3} - 10^{-4} \text{K}^{-1}$, so dass fuer $\Delta T < 10 \text{K}$

$$\frac{|\Delta \rho|}{\rho_0} \lesssim 10^{-2} - 10^{-3} \ll 1 \quad (2.22)$$

gilt.

Die Kontinuitätsgleichung (2.1) lässt sich auch schreiben als

2.4 Kontinuierliche Dynamik in drei Dimensionen

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \underline{\nabla}^T \underline{v} = 0.$$

Unter Laborverhaeltnissen ist in den meisten Faellen statt (2.1) die Inkompressibilitaetsbedingung

$$\underline{\nabla}^T \underline{v} = 0 \quad (2.23)$$

zur Beschreibung der auftretenden Stroemungen ausreichend (Chandrasekhar, 1961, Normand et al., 1977).

Unter der Annahme, dass die Schwerebeschleunigung \underline{g} im Bereich der Fluessigkeit nur schwach variiert, ($\underline{g} = -g \cdot \underline{e}_z$, $g = \text{const.}$) und mit dem Newtonschen Ansatz fuer den zaehen Spannungstensor

$$\underline{\underline{\sigma}} = \eta \cdot \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}$$

(η : dynamische Viskositaet) laesst sich Gleichung (2.2) so umformulieren :

$$\rho \frac{D\underline{v}}{Dt} = -\rho g \underline{e}_z - \underline{\nabla} p + \underline{\nabla}^T (\eta \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}),$$

fuer Fluessigkeiten mit konstanter Viskositaet :

$$\rho \frac{D\underline{v}}{Dt} = -\rho g \underline{e}_z - \underline{\nabla} p + \eta \underline{\nabla}^2 \underline{v}. \quad (2.24)$$

Zur Vereinfachung von Gleichung (2.3) seien folgende Annahmen gemacht, die im ueblichen Rahmen fuer Laborexperimente erfuehrt werden :

- keine internen Waermequellen : $Q = 0$
- keine dissipative Waermeproduktion : $\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{\dot{\epsilon}}} = 0$
- konstante Waermeleitfaehigkeit : $\lambda = \text{const.}$

Da fuer inkompressible Fluessigkeiten $C_p = C_v$, folgt

$$\frac{DT}{Dt} = \kappa \underline{\nabla}^2 T. \quad (2.25)$$

Dabei ist $\kappa = \lambda / \rho C_p$ die Temperaturleitfaehigkeit.

Eine Loesung von (2.23) - (2.25) ist der konduktive Zustand :

$$T_c = T_0 + \left(1 - \frac{z}{H}\right) \Delta T$$

2 Nichtlineare Dynamik

$$\rho_c = \rho_0(1 - \alpha(T_c - T_0))$$

$$\begin{aligned}\underline{\nabla} p_c &= -\rho_c g \underline{e}_z \\ \underline{v}_c &= 0\end{aligned}\tag{2.26}$$

Die Gleichungen (2.26) beschreiben einen Fixpunkt des Systems (2.23)-(2.25). Lord Rayleigh (1916) konnte als erster zeigen, dass -bei festen Materialparametern - die lineare, konduktive Temperaturschichtung bei einer kritischen Temperaturdifferenz ΔT instabil wird und die Fluessigkeit anfaengt, zu stroemen. Wir betrachten im folgenden kleine Stoerungen des konduktiven Zustands.

$$T = T_c + \delta T$$

$$\rho = \rho_c + \delta \rho$$

$$\underline{\nabla} p = \underline{\nabla} p_c + \underline{\nabla} \delta p$$

$$\underline{v} \neq 0\tag{2.27}$$

(2.27) in (2.23) und (2.24) eingesetzt ergibt :

$$\underline{\nabla}^T \underline{v} = 0\tag{2.28}$$

$$(\rho_c + \delta \rho) \frac{D\underline{v}}{Dt} = -(\rho_c + \delta \rho) g \underline{e}_z - \underline{\nabla} p_c - \underline{\nabla} \delta p + \eta \underline{\nabla}^2 \underline{v} \longrightarrow$$

$$(1 - \alpha(T_c - T_0 + \delta T)) \frac{D\underline{v}}{Dt} = -\frac{\delta \rho}{\rho_0} g \underline{e}_z - \frac{1}{\rho_0} \underline{\nabla} \delta p + \frac{\eta}{\rho_0} \underline{\nabla}^2 \underline{v}.$$

Die Dichteveriationen spielen im Traegheitsterm auf der linken Seite wegen (2.22) nur eine geringe Rolle, waehrend sie in den Auftriebsterm auf der rechten Seite in erster Ordnung eingehen und hier nicht vernachlaessigt werden duerfen. Die Beruecksichtigung von Dichteveriationen ausschliesslich im Auftriebsterm wird Boussinesq-Approximation genannt. Ihre Anwendung ist fuer Laborverhaeltnisse gerechtfertigt (Chandrasekhar, 1961; Normand et al., 1977). Man erhaelt schliesslich :

$$\frac{D\underline{v}}{Dt} = -\alpha \delta T g \underline{e}_z - \frac{1}{\rho_0} \underline{\nabla} \delta p + \nu \underline{\nabla}^2 \underline{v}\tag{2.29}$$

2.4 Kontinuierliche Dynamik in drei Dimensionen

$$\frac{D\delta T}{Dt} = \kappa \nabla^2 \delta T + \frac{\Delta T}{H} v_z \quad (2.30)$$

Hier bezeichnet $\nu = \eta/\rho_0$ die kinematische Viskosität.

2.4.2 Das 3-Moden-Modell von Lorenz

Lorenz (1963) betrachtete in y-Richtung homogene Loesungen von (2.28)-(2.30). Die Inkompressibilitaetsbedingung (2.28) kann dann implizit durch Einfuehrung einer Stromfunktion φ erfuehrt werden :

$$v_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}, \quad v_z = \frac{\partial\varphi}{\partial x}.$$

Setzt man an der oberen und unteren Grenzflaeche folgende Randbedingungen voraus

$$\delta T(0) = \delta T(H) = \varphi(0) = \varphi(H) = \nabla^2\varphi(0) = \nabla^2\varphi(H) = 0,$$

so kann man δT und φ in Sinusreihen entwickeln (McLaughlin und Martin, 1975) :

$$\begin{pmatrix} \varphi \\ \delta T \end{pmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sin(m\pi z) \cdot \begin{pmatrix} \varphi_m(x, t) \\ \delta T_m(x, t) \end{pmatrix}.$$

Die $\varphi_m(x, t)$ und $\delta T_m(x, t)$ sind wiederum Fourierreihen in x mit zeitabhaengigen Amplituden. Saltzmann (1962) fuehrte numerische Analyse mit insgesamt 64 Moden durch und fand, dass nur 3 Moden eine relativ grosse Amplitude haben. Diese sind

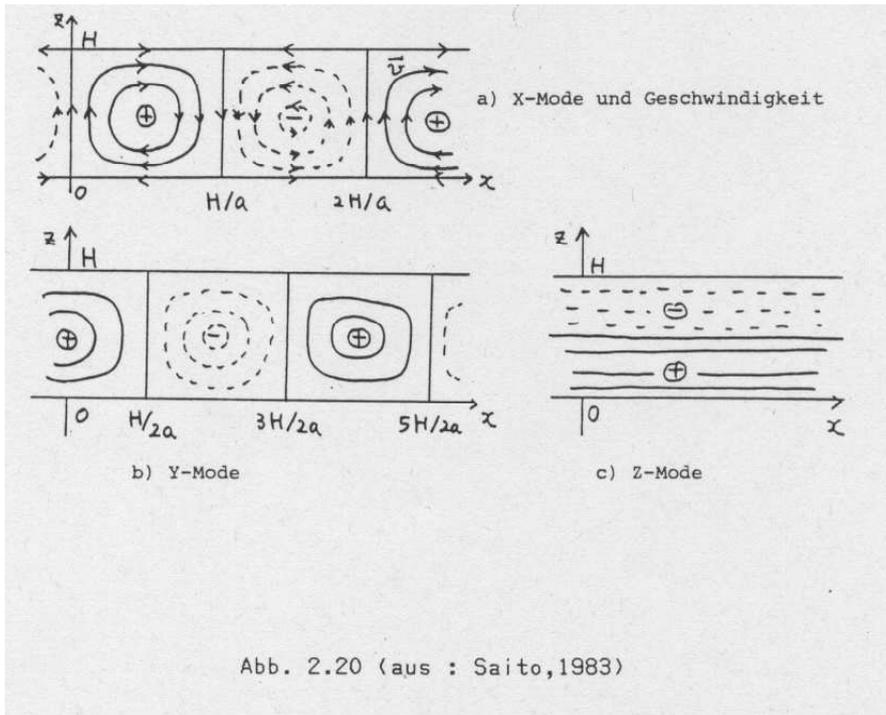
$$\varphi = \frac{\sqrt{2}(1+a^2)\kappa}{a} \cdot X(t) \cdot \sin\left(\frac{\pi ax}{H}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi z}{H}\right)$$

$$\delta T = \frac{\Delta T}{H} \cdot \frac{Ra_c}{Ra} \cdot \left[\sqrt{2}Y(t) \cos\left(\frac{\pi ax}{H}\right) \sin\left(\frac{\pi z}{H}\right) - Z(t) \sin\left(\frac{2\pi z}{H}\right) \right]. \quad (2.31)$$

Hier bezeichnen $Ra = \frac{\alpha g \Delta T H^3}{\nu \kappa}$ die Rayleighzahl und $Ra_c = \frac{\pi^4(1+a^2)^3}{a^2}$ die kritische Rayleighzahl der Wellenzahl $\pi a/H$.

Es wurden hier Ergebnisse aus Kapitel 3 vorweggenommen : Der konduktive Zustand, beschrieben durch (2.26), wird instabil gegenueber Stoerungen der Wellenlaenge $H/\pi a$, wenn die Rayleighzahl ihren kritischen Wert ueberschreitet.

Eine physikalische Interpretation der drei Moden X, Y und Z (nicht zu verwechseln mit den Raumkoordinaten x, y, z) stellt Abbildung (2.20) dar. Die X-Mode repraesentiert die Winkelgeschwindigkeit einer Konvektionsrolle, die Y-Mode die Temperaturverteilung (kalte Fluessigkeit sinkt ab, warme steigt auf), und die Z-Mode die Abweichung der horizontal gemittelten Temperatur vom konduktiven Zustand (man beachte das negative Vorzeichen von Z in (2.31)).



Eliminiert man den Druck in Gleichung (2.29) durch Bildung der Rotation und skaliert man die Zeit wie folgt um :

$$t \longrightarrow t \cdot \frac{\pi^2 (1 + a^2) \kappa}{H^2},$$

so erhält man durch Vergleich der Koeffizienten der einzelnen Moden die Lorenz-Gleichungen (Saito, 1983).

$$\dot{X} = -Pr \cdot X + Pr \cdot Y$$

$$\dot{Y} = -X \cdot Z + r \cdot X - Y$$

$$\dot{Z} = X \cdot Y - b \cdot Z \tag{2.32}$$

Mit $Pr = \nu/\kappa =$ Prandtlzahl, $r = Ra/R_c$, $b = 4/(1 + a^2)$. Der Fluss, der durch (2.32) erzeugt wird, ist kontrahierend da nach (2.7) gilt

$$\frac{\partial \dot{X}}{\partial X} + \frac{\partial \dot{Y}}{\partial Y} + \frac{\partial \dot{Z}}{\partial Z} = -(Pr + b + 1) < 0.$$

Das Lorenz-System ist also dissipativ.

2.4.3 Fixpunkte des Modells

Die Fixpunkte der Abbildung (2.32) sind gegeben durch

$$X = Y, Z = \frac{X^2}{b}, X \left(-\frac{X^2}{b} + (r-1) \right) = 0.$$

mit den Loesungen

$$X = Y = Z = 0$$

und

$$X = Y = \pm \sqrt{b(r-1)}, Z = r-1.$$

Die beiden letzten Fixpunkte existieren nur fuer $r > 1$ und entsprechen dem stationaeren Rollenmuster mit jeweils gegenlaeufigem Umlaufsinn. Linearisierung um den konduktiven Zustand liefert die charakteristische Gleichung fuer die Eigenwerte des Fixpunktes $(0,0,0)$:

$$(\lambda + b) (\lambda^2 + (Pr + 1) \lambda + Pr(1 - r)) = 0$$

mit den Wurzeln

$$\lambda_0 = -b < 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{Pr + 1}{2} \pm \sqrt{\frac{(Pr + 1)^2}{4} - Pr(1 - r)}.$$

Fuer $r < 1$ gilt $\lambda_{1,2} < 0$, der Fixpunkt ist stabil und wird erst fuer $r = 1$ instabil, da dort $\lambda_2 = 0$.

Linearisierung um die beiden anderen Fixpunkte ergibt in beiden Faellen

$$\lambda^3 + (Pr + b + 1) \cdot \lambda^2 + (r + Pr) b \cdot \lambda + 2Pr(r - 1) b = 0. \quad (2.33)$$

Unterhalb eines bestimmten Wertes $r_1 > 1$ hat Gleichung (2.33) drei reelle Wurzeln, deren Werte stetig vom Parameter r abhaengen. Zwei sind negativ und eine positiv fuer $r > 1$, in diesem Bereich ist der konduktive Zustand, wie erwartet, der einzig stabile Fixpunkt. Fuer $1 < r < r_1$ ist die dritte Wurzel ebenfalls negativ und die beiden konvektiven Fixpunkte sind asymptotisch stabil. Bei $r = r_1$ werden zwei Eigenwerte zu komplex konjugierten Paaren mit negativem Realteil, der dritte Eigenwert bleibt reell und negativ fuer alle r .

2.4 Kontinuierliche Dynamik in drei Dimensionen

Bei einem kritischen Wert $r = r_T$ ueberquert das komplex konjugierte Paar die imaginaere Achse : die beiden Fixpunkte werden instabil (Abb. 2.21).

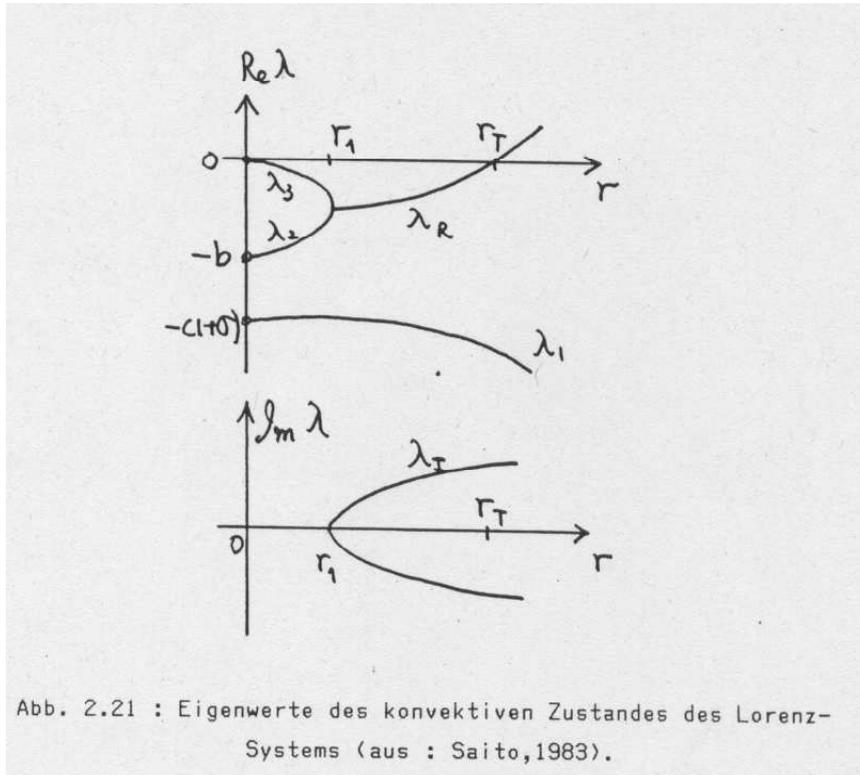


Abb. 2.21 : Eigenwerte des konvektiven Zustandes des Lorenz-Systems (aus : Saito, 1983).

Den kritischen Wert r_T erhaelt man aus der Bedingung, dass Gleichung (2.33) dort eine reelle und zwei rein imaginaere Wurzeln $\pm i\lambda_0$ hat :

$$(\lambda + i\lambda_0)(\lambda - i\lambda_0)(\lambda - \lambda_1) = \lambda^3 - \lambda_1\lambda^2 + \lambda_0^2\lambda - \lambda_1\lambda_0^2 = 0.$$

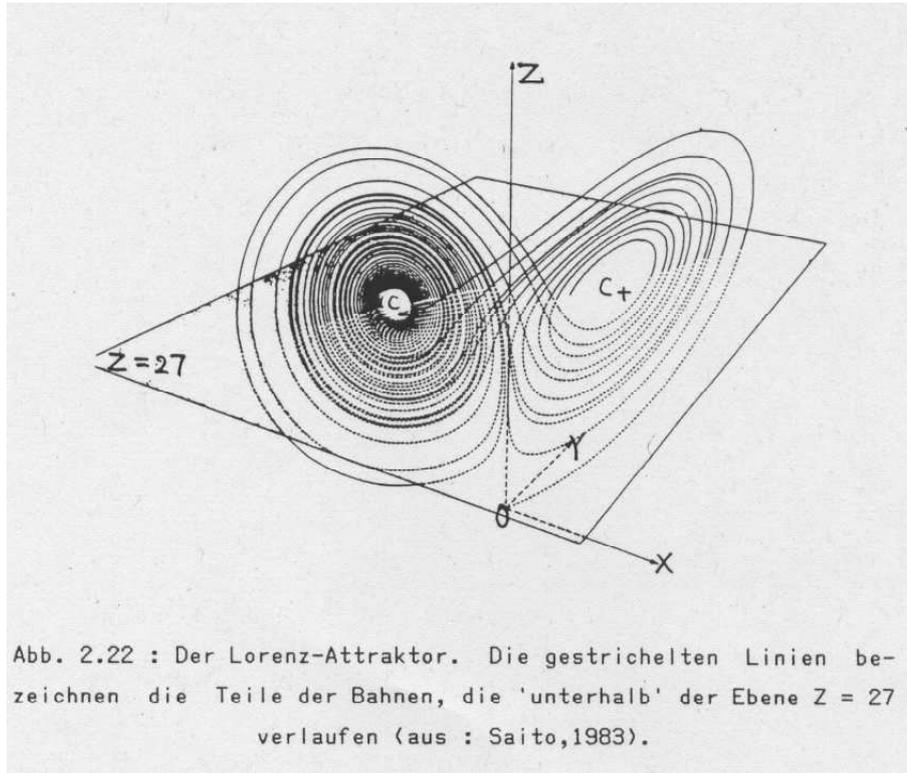
Nach Koeffizientenvergleich mit (2.33) erhaelt man

$$r_T = \frac{\text{Pr}(\text{Pr} + b + 3)}{\text{Pr} - b - 1}. \quad (2.34)$$

Man sieht, dass (2.34) fuer $\text{Pr} < b + 1$ keine Loesung hat, da $r > 0$ gelten muss. Die stationaeren Loesungen sind also bei kleinen Prandtlzahlen fuer alle Rayleighzahlen stabil, im Widerspruch zu experimentellen Ergebnissen. McLaughlin und Martin (1975) erklae- ren das mit der Tatsache, dass bei Fluessigkeiten und Gasen mit kleiner Prandtlzahl vor dem Uebergang zu zeitabhaengigem Verhalten immer dreidimensionale Stroemungen auftreten, so dass das Modell von Lorenz nur ab einer gewissen Prandtlzahl Aussagekraft besitzt.

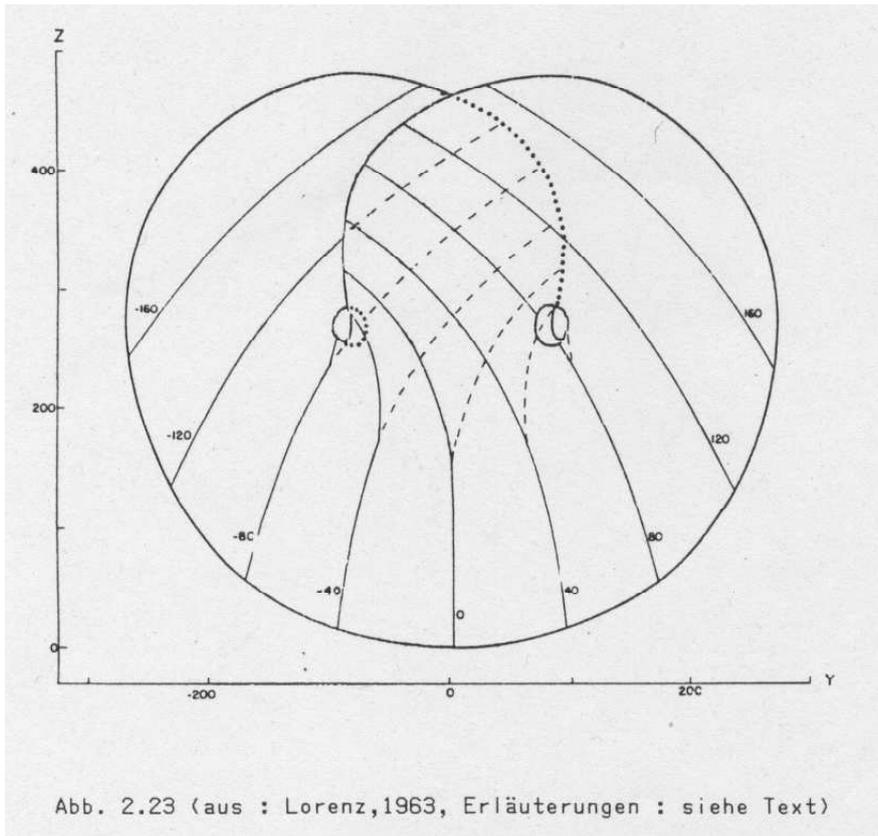
2.4.4 Der Lorenz-Attraktor

Lorenz integrierte das System (2.32) mit den Parametern $Pr = 10$, $b = 8/3$, und $r = 28 > r_T = 24.74$ numerisch vom Startpunkt $(0,1,0)$ aus. Die so gewonnene Trajektorie ist in Abb. 2.22 dargestellt.



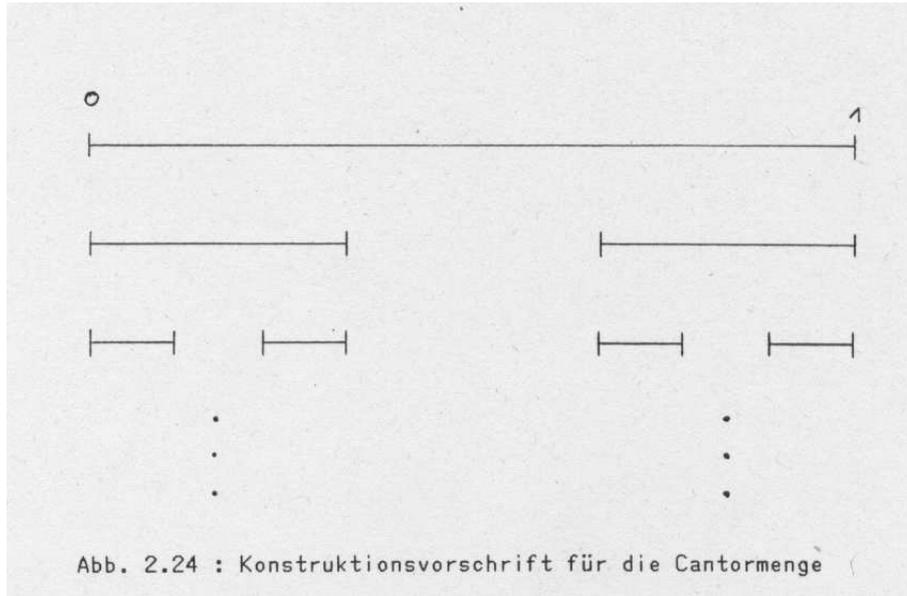
Die Punkte C_+ und C_- bezeichnen die Lage der instabilen Fixpunkte, die das stationäre Rollenmuster repräsentieren. Verfolgt man einen Punkt auf seiner Bahn, so stellt man folgendes fest : Kommt er in die Nähe eines abstossenden Fixpunktes, so entfernt er sich sogleich wieder auf einer spiralartigen Bahn. Wenn er auf dieser Bahn einen kritischen Abstand erreicht hat, verlässt er die Umgebung des Fixpunktes und nähert sich dem anderen, um den er die gleiche Bewegung vollführt bis er den kritischen Abstand erreicht und sich wieder dem ersten Fixpunkt nähert. Die Anzahl der 'Umkreisungen' unterscheidet sich von Mal zu Mal. Die Bahn ist nicht periodisch, d. h. es handelt sich um eine geschlossene Trajektorie (Grenzzyklus). Vielmehr scheint die Trajektorie eine Art Fläche im dreidimensionalen Phasenraum zu bilden. Punkte in ihrer Nähe werden asymptotisch angezogen, es handelt sich also um einen Attraktor.

Abbildung 2.23 zeigt die Linien konstanter X-Werte (Isoplethen) in der Y-Z-Ebene.



Dort, wo zwei X -Werte vorkommen, bezeichnen die gestrichelten Linien die Isoplethen fuer die niedrigeren Werte. Die fetten durchgezogenen Linien bilden die Grenzen fuer den Attraktor in der Y - Z -Ebene, denn der Attraktor ist im Phasenraum räumlich begrenzt (Saito, 1983). Die Abbildung wurde aus den Werten fuer jede 5. der ersten 6000 Iterationen des Lorenz-Modells gewonnen.

Die 'Fläche' in Abb. 2.23 besteht aus zwei 'Blättern' mit den mit den Zentren C_+ (fuer positive X) und C_- (fuer negative X). Fuer kleine X scheinen die beiden Blätter zusammenzuwachsen. Das ist jedoch wegen der Eindeutigkeit von (2.32) nicht möglich, da sich Trajektorien weder schneiden noch beruehren dürfen. Tatsächlich besteht jedes Blatt aus unendlich vielen Lagen, die beliebig nahe aneinander liegen, sich aber nicht beruehren. Die Trajektorie darf sich natürlich auch innerhalb einer einzelnen Lage weder selbst beruehren noch sich selbst kreuzen : Schneidet man die Lage durch, so erkennt man, dass sie aus mehreren Streifen besteht, die räumlich voneinander getrennt sind. Jeder einzelne Streifen besteht jedoch wiederum aus schmalere, ebenfalls räumlich getrennten Streifen und so fort ad infinitum. Der Attraktor hat eine ähnliche Struktur wie die Menge der Fenster der logistischen Abbildung aus Abschnitt 2.3. Sie ist typisch fuer 'Fractals', das sind Punktmenge mit einer nicht-ganzzahligen Hausdorff-Dimension. Das einfachste Beispiel fuer eine solche Menge ist die Cantormenge (Abb. 2.24).



Die Hausdorff-Dimension d einer Punktmenge A in einem D -dimensionalen Raum ($D > d$) ist wie folgt definiert (Graham, 1983). Sei $N(\varepsilon)$ die kleinstmögliche Anzahl von Volumenelementen der Größe ε , mit der sich A überdecken lässt. Dann ist

$$d = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)} \quad (2.35)$$

die Hausdorff-Dimension von A .

Für 'normale', d. h. ganzzahlig-dimensionale, Punkt Mengen der Dimension n gilt immer eine Abhängigkeit der Form $N(\varepsilon) \sim (1/\varepsilon)^n$, so dass (2.35) immer $d = n$ ergibt. Man macht sich leicht klar dass im Fall der Cantormenge im n -ten Schritt $N(n) = 2^n$ Intervalle der Länge $\varepsilon(n) = (1/3)^n$ zur Überdeckung benötigt werden, woraus $d = \ln(2) / \ln(3)$ folgt. Eine numerische Analyse des Lorenz-Attraktors (Mori, 1980) mit den Parametern $Pr = 16$, $b = 4$, und $r = 40$ ergab die Hausdorff-Dimension $d = 2.06$.

Der für $r = 28$ beobachtete Attraktor ist strukturell instabil gegenüber Schwankungen des Parameters r (Yorke und Yorke, 1981), d. h. für verschiedene r haben die Attraktoren verschiedene topographische Strukturen : Der eine lässt sich aus dem anderen nicht durch Verbiegungen und Verzerrungen erzeugen, ist aber immer noch 'seltsam' (Langford, 1981).

2.4.5 Bifurkationen

McLaughlin und Martin (1975) entdeckten, dass das Lorenz-Modell für r knapp unterhalb des kritischen Wertes r_T zwei instabile Grenzzyklen in der Nähe der stabilen Fixpunkte besitzt. Die Bifurkationstheorie sagt für diesen Fall einer subkritischen Hopf-Bifurkation (Abb. 2.25) die Existenz eines stabilen Grenzzyklus oberhalb von r_T voraus.

Sowohl im Lorenz-Modell als auch in realen physikalischen Systemen konnte dieser stabile Grenzzyklus jedoch nicht nachgewiesen werden, es erfolgt vielmehr ein direkter Uebergang zu aperiodischen Bewegungen. Diesen Widerspruch erklart Joseph (1981) damit, dass die Vorhersage der Bifurkationstheorie auf der Betrachtung zweidimensionaler periodischer Stoerungen beruht, die Stoerungen in den erwahnten Systemen jedoch anderer Art sein koennen.

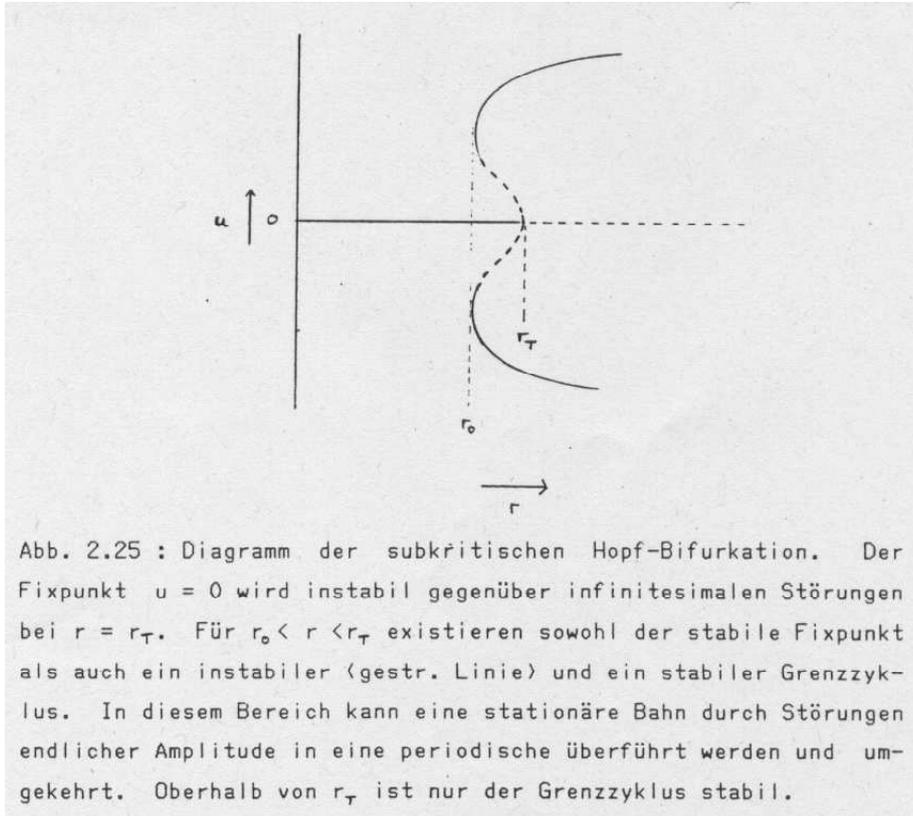


Abb. 2.25 : Diagramm der subkritischen Hopf-Bifurkation. Der Fixpunkt $u = 0$ wird instabil gegenüber infinitesimalen Störungen bei $r = r_T$. Für $r_0 < r < r_T$ existieren sowohl der stabile Fixpunkt als auch ein instabiler (gestr. Linie) und ein stabiler Grenzzyklus. In diesem Bereich kann eine stationäre Bahn durch Störungen endlicher Amplitude in eine periodische überführt werden und umgekehrt. Oberhalb von r_T ist nur der Grenzzyklus stabil.

Die Charakteristika der subkritischen Hopf-Bifurkation sind, auch wenn anstatt des Grenzzyklus ein seltsamer Attraktor auftritt, metastabile Bahnen und Hysterese. Das soll naeher erlaeutert werden.

Unterhalb von r_T koennen Bahnen, die sich einem stabilen Fixpunkt naehern, zunaechst vom instabilen Grenzzyklus abgestossen werden und in die Naehelike des anderen Fixpunktes gelangen. Ob sie nun von diesem endgueltig angezogen oder vom anderen Grenzzyklus abgestossen werden, haengt empfindlich vom Verlauf ihrer Annaeherung ab. In jedem Punkt des Phasenraumes konkurrieren abstossende und anziehende Kraefte der invarianten Mannigfaltigkeiten miteinander, das entstehende 'Kraftfeld' ist aeusserst kompliziert. Die Zeit, die vergeht, bis ein Bahnpunkt endgueltig in einer kleinen Umgebung eines Fixpunktes bleibt, kann sehr lang sein. Deshalb wird dieses Verhalten metastabil genannt.

Oberhalb von r_T werden die Fixpunkte instabil, der Lorenz-Attraktor stabil. Es existiert jedoch ein $r_0 < r_T$, so dass fuer $r_0 < r < r_T$ sowohl die Fixpunkte als auch der seltsame

2 Nichtlineare Dynamik

Attraktor stabil sind. Ihre Anziehungsbereiche sind disjunkte Teilmengen des Phasenraums. Betrachtet man einen Punkt im Anziehungsbereich des Attraktors, während man den Parameter r langsam unter den kritischen Wert r_T sinken lässt, so wird man feststellen, dass er weiter seine aperiodische Bahn verfolgt, bis der Attraktor fuer $r < r_0$ instabil wird (Abb. 2.25). Kaplan und Yorke (1979) fanden $r_0 = 24.06$, jedoch metastabile Bahnen schon fuer $r > 13.926$.

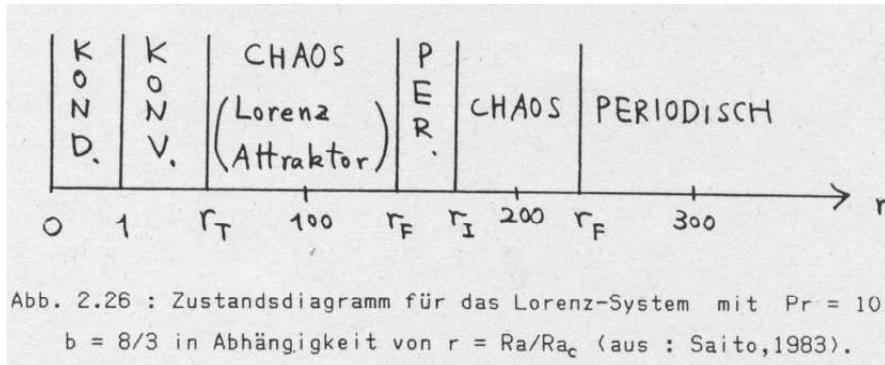


Abb. 2.26 : Zustandsdiagramm für das Lorenz-System mit $Pr = 10$, $b = 8/3$ in Abhängigkeit von $r = Ra/Ra_c$ (aus : Saito, 1983).

Weitere Bifurkationen fanden Manneville und Pomeau (1980) im Bereich $r > r_T$ (Abb. 2.26)

- Im Bereich $r = 148.4 \rightarrow 145$ geht die periodische Bahn durch subharmonische Bifurkationen in chaotische Bewegung (Lorenz-Attraktor) ueber.
- Intermittenz charakterisiert den Uebergang bei $r = 166.07$ (Abb. 2.27). Verantwortlich ist eine Sattel-Knoten-Bifurkation.
- Die gleichen subharmonischen Bifurkationen wie in a) finden im Bereich $r = 223.5 \rightarrow 210$ statt.

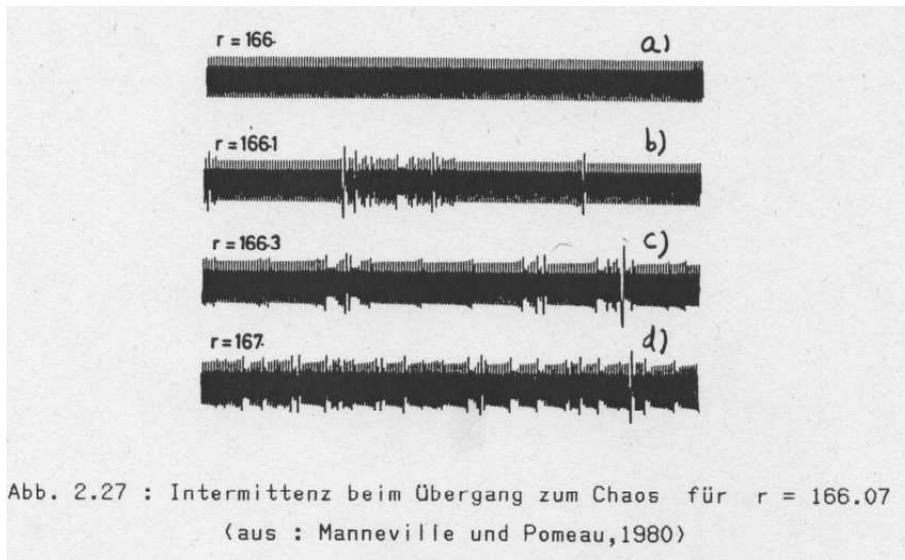


Abb. 2.27 : Intermittenz beim Übergang zum Chaos für $r = 166.07$ (aus : Manneville und Pomeau, 1980)

Man findet also die Bifurkationen des eindimensionalen diskreten Systems in diesem dreidimensionalen, kontinuierlichen System ueberall dort wieder, wo quasi-eindimensionale

2.4 Kontinuierliche Dynamik in drei Dimensionen

Bewegungen angetroffen werden. In hydrodynamischen Laborversuchen konnten diese Uebergaenge ebenfalls nachgewiesen werden. Das naechste Kapitel befasst sich daher mit der Entstehung von Turbulenz aus stationaeren, laminaren Stroemungen.

3 Rayleigh-Benard-Konvektion aus der Sicht der Nichtlinearen Dynamik

Aufschlüsse ueber die Form der Konvektion im Erdmantel koennen nicht durch die direkte Messung von Geschwindigkeiten oder Temperaturen gewonnen werden, sondern nur durch die Interpretation messbarer geophysikalischer Groessen wie z. B. seismische Geschwindigkeiten, Waermefluss oder Driftgeschwindigkeiten ozeanischer und kontinentaler Platten. Um den Zusammenhang solcher abgeleiteter Groessen mit bestimmten Stroemungsformen herstellen zu koennen, sind Untersuchungen an relevanten konvektiven Systemen notwendig. In der Geophysik wird hierzu ueblicherweise das System der Rayleigh-Benard-Konvektion herangezogen, da man - mit guten Gruenden - annimmt, dass seine physikalischen Eigenschaften den Verhaeltnissen im Erdmantel annaeherd entsprechen. Daher sollen in diesem Kapitel die wichtigsten Ergebnisse aus den bisherigen theoretischen und experimentellen Untersuchungen der Rayleigh-Benard-Konvektion vorgestellt werden. Dabei wird gezeigt, dass der in Kapitel 2 eingefuehrte Begriff der Bifurkation eine entscheidende Rolle spielt fuer das Verhalten von Fluiden beim Uebergang von stationaeren zu turbulenten Stroemungsformen. Der fuer das Auftreten von Bifurkationen entscheidende Parameter ist hier die Rayleighzahl. Die experimentellen Ergebnisse von Malraison et al. (1983) bestaetigen die theoretische Vermutung, dass Turbulenz mit dem Auftreten seltsamer Attraktoren verbunden ist.

3.1 Der lineare Bereich

In den Gleichungen (2.28)-(2.30) sind die Groessen \mathbf{v} , δT und δp als Abweichungen vom konduktiven Zustand aufzufassen. Fuer kleine Abweichungen kann man (2.28) bis (2.30) linearisieren. Die konvektive Ableitung wird dann einfach zu $\frac{\partial}{\partial t}$. Nach der folgenden Skalierung

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{x}'_i \cdot H$$

$$t = t' \cdot \frac{H^2}{\nu}$$

$$\underline{\mathbf{v}}(\mathbf{x}_i, t) = \underline{\mathbf{v}}'(\mathbf{x}'_i, t') \cdot \frac{\nu}{H}$$

$$\underline{\nabla} = \underline{\nabla}' \cdot \frac{1}{H}$$

$$\delta T = T'(\mathbf{x}'_i, t') \cdot \Delta T \cdot \frac{\text{Pr}}{\sqrt{\text{Ra}}}$$

erhaelt man (der Einfachheit halber werden die Striche fortan weggelassen) :

$$\text{Pr} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \underline{\nabla}^2 T + \sqrt{\text{Ra}} \cdot v_z \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial \underline{\mathbf{v}}}{\partial t} = -\frac{H^2}{\rho_0 \nu^2} \cdot \underline{\nabla} \delta p + \underline{\nabla}^2 \underline{\mathbf{v}} + \sqrt{\text{Ra}} \cdot T \cdot \underline{\mathbf{e}}_z \quad (3.2)$$

$$\underline{\nabla}^T \underline{\mathbf{v}} = 0. \quad (3.3)$$

Dabei bezeichnet $\text{Pr} = \frac{\nu}{\kappa}$ bzw. $\text{Ra} = \frac{\alpha g \Delta T H^3}{\nu \kappa}$ die in Kapitel 2 vorgestellte Prandtl- bzw. Rayleighzahl. Die linearisierten Gleichungen (3.1)-(3.3) erhaelt man uebrigens auch ohne Anwendung der Boussinesq-Approximation (Chandrasekhar, 1961). Zweimalige Bildung der Rotation von Gleichung (3.2) eliminiert den Druck und man erhaelt unter Verwendung von (3.3) :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\underline{\nabla}^2 v_z) = \underline{\nabla}^4 v_z + \sqrt{\text{Ra}} \cdot \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (3.4)$$

Man hat zwei unabhaengige Variable eingestart auf Kosten hoeherer Ordnung der Differentialgleichung. Alle auftretenden Groessen sind jetzt dimensionslos : Das Verhalten

von Flüssigkeiten haengt nur noch von den dimensionlosen Parametern Rayleigh- und Prandtlzahl ab. Da die Gleichungen (3.1) und (3.4) linear sind, kann man sie mittels Fouriertransformation loesen (Binder, 1983).

$$v_z = \int v_z(\underline{k}, t) e^{i\underline{k}\cdot\underline{x}} d\underline{k}, \quad T = \int T(\underline{k}, t) e^{i\underline{k}\cdot\underline{x}} d\underline{k} \quad (3.5)$$

Die einfachsten Randbedingungen sind die fuer freie Oberflaechen :

$$T = v_z = \frac{\partial v_x}{\partial z} = \frac{\partial v_y}{\partial z} = 0. \quad (3.6)$$

Sie lassen nur bestimmte Wellenzahlen in z-Richtung zu. Die Gleichungen (3.5) werden dann zu

$$v_z = \sum_{n=1}^{\infty} \int v_{zn}(k_x, k_y, t) \sin(n\pi z) e^{i(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y$$

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} \int T_n(k_x, k_y, t) \sin(n\pi z) e^{i(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y.$$

Einsetzen in (3.1) und (3.4) ergibt

$$\dot{v}_{zn} = -a^2 v_{zn} + \sqrt{Ra} \frac{k^2}{a^2} T_n$$

$$\dot{T}_n = \frac{\sqrt{Ra}}{Pr} v_{zn} - \frac{a^2}{Pr} T_n$$

$$a^2 = k^2 + (n\pi)^2, \quad k^2 = k_x^2 + k_y^2$$

oder

$$\begin{pmatrix} \dot{v}_{zn} \\ \dot{T}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a^2 & \frac{k^2}{a^2} \cdot Ra^{1/2} \\ \frac{Ra^{1/2}}{Pr} & -\frac{a^2}{Pr} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_{zn} \\ T_n \end{pmatrix} = \underline{A} \cdot \begin{pmatrix} v_{zn} \\ T_n \end{pmatrix}. \quad (3.7)$$

Die Eigenwerte von \underline{A} lauten

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left[-a^2 (1 + Pr^{-1}) \pm \sqrt{a^4 (1 + Pr^{-1})^2 + \frac{Ra \cdot k^2}{Pr \cdot a^2} - \frac{a^4}{Pr}} \right].$$

Der konduktive Zustand wird marginal stabil fuer $\lambda_1 = 0$, also

3 Rayleigh-Benard-Konvektion aus der Sicht der Nichtlinearen Dynamik

$$\frac{\text{Ra} \cdot k^2}{\text{Pr} \cdot a^2} - \frac{a^4}{\text{Pr}} = 0 \longrightarrow \text{Ra} = \frac{a^6}{k^2} = \frac{(k^2 + (n\pi)^2)^3}{k^2}.$$

Der niedrigste kritische Wert tritt natuerlich fuer $n = 1$ auf. Die Funktion

$$\text{Ra}(k) = \frac{(k^2 + \pi^2)^3}{k^2}$$

hat ein Minimum bei $k_c = \pi/\sqrt{2}$ und nimmt dort den Wert

$$\text{Ra}_c = \frac{27\pi^4}{4} = 657.5$$

an. Fuer feste Oberflaechen ergibt sich der Wert der kritischen Rayleighzahl zu

$$\text{Ra}_c = 1707.7$$

und fuer eine freie und eine feste Oberflaechen

$$\text{Ra}_c = 1100.65.$$

Die erste lineare Stabilitaetsanalyse fuehrte Lord Rayleigh (1916) durch, um die experimentellen Ergebnisse von Benard (1901) zu erkaeren. Benard hatte hexagonale Stroemungsmuster gefunden : In der Mitte der Hexagone stieg die Fluessigkeit auf, an den Raendern sank sie ab. Lord Rayleighs Ergebnisse stimmten jedoch weder in der kritischen Rayleighzahl noch in der Wellenlaenge der zuerst beobachteten Stroemung mit denen von Benard ueberein. Erst Jahrzehnte spaeter wurde gezeigt, dass die Benard-schen Zellen durch die Marangoni-Instabilitaet erzeugt werden, die durch Unterschiede in der Oberflaechenspannung entsteht.

In einer Fluessigkeit, die zwischen zwei festen Platten eingeschlossen ist, spielen solche Oberflaecheneffekte keine Rolle und es bilden sich bei Ueberschreiten der kritischen Rayleighzahl Konvektionsrollen mit parallelen Achsen (Normand et al., 1977). Sowohl die Wellenlaenge des Stroemungsmusters als auch der Wert der kritischen Rayleighzahl stimmen mit den theoretischen Aussagen ueberein. In Versuchsanordnungen lassen sich natuerlich die in der Theorie vernachlaessigten lateralen Begrenzungen nicht vermeiden. In einer im horizontalen Schnitt rechteckigen Anordnung bilden sich Rollen aus, deren Achsen parallel zur kuerzeren Seite der Anordnung liegen, da so die Reibung der auer-ersten Rollen minimal wird.

Voraussetzungen fuer die Ausbildung des Rollenmusters sind gewisse Symmetrien in der Versuchsanordnung. Symmetriebrechende Verhaeltnisse wie etwa Temperaturunterschiede innerhalb einer horizontalen Grenzschicht oder nicht-konstante Viskositaet koennen zu

unregelmässigen Strömungsmustern führen, wie sie auch in unserem Versuch beobachtet wurden (Kuth, 1983).

Die Stabilität von Konvektionsrollen wurde theoretisch in Form einer Störungsrechnung von Schlueter et al. (1965) sowie experimentell von Busse und Whitehead (1971, 1974) untersucht. Die Ergebnisse wurden dann im sogenannten Busse-Ballon (Abb. 3.1) zusammengefasst. Abb. 3.1 ist eine Darstellung im dreidimensionalen Raum der Parameter Prandtlzahl (P), Rayleighzahl (R) und Wellenzahl (α , entspricht der Wellenzahl k in Gl. (3.7)). Ein Punkt innerhalb des Raumes entspricht einem Rollenmuster mit den angegebenen Konstanten. Die Punkte innerhalb des Ballons repräsentieren stationäre, stabile Rollenmuster. Die dick ausgezogenen Linien markieren das Auftreten bestimmter Instabilitäten. Es bedeuten :

ZZ : Zick-Zack Instabilität (zig-zag-instability, Abb. 3.2)

CR : Kreuzrollen-Instabilität (cross-roll-instability, Abb. 3.3)

KN : Knoten-Instabilität (knot-instability, Abb. 3.4)

SV : Skewed-varicose-instability (Abb. 3.5)

OS : Oszillatorische Instabilität (oscillatory instability)

Die Photos in den Abbildungen 3.2 bis 3.5 wurden mit dem Shadowgraph-Verfahren aufgenommen. Kalte, absinkende Flüssigkeit erscheint hell, warme, aufsteigende, dunkel.

Alle Instabilitäten ausser der oszillatorischen sind dadurch charakterisiert, dass sie einen stationären Zustand in einen anderen überführen (bifurcation of steady states). Die oszillatorische Instabilität durchbricht die zeitliche Symmetrie durch eine superkritische Hopf-Bifurkation. Zur näheren Diskussion der einzelnen Instabilitäten siehe Busse und Whitehead (1971, 1974), Busse (1972) sowie zusammenfassend Wittig (1983).

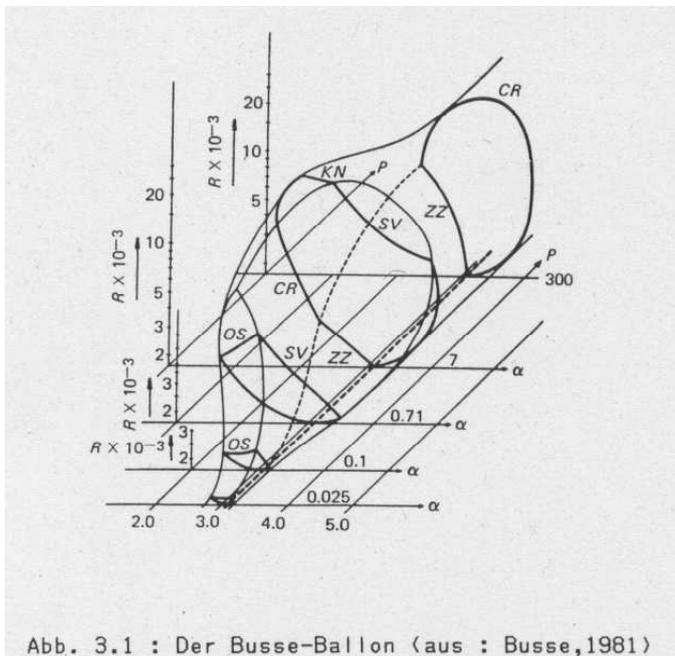
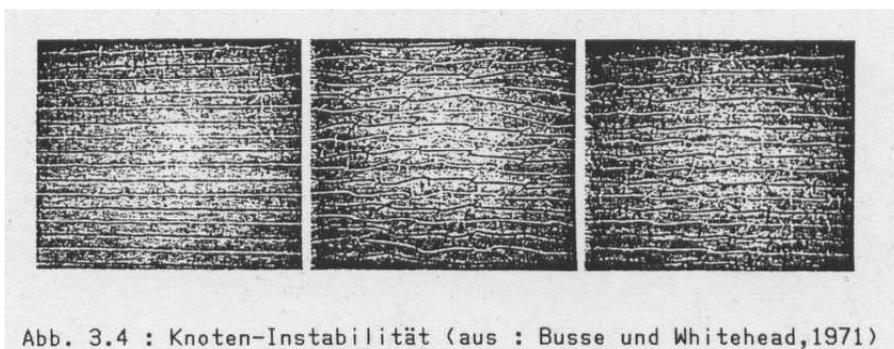
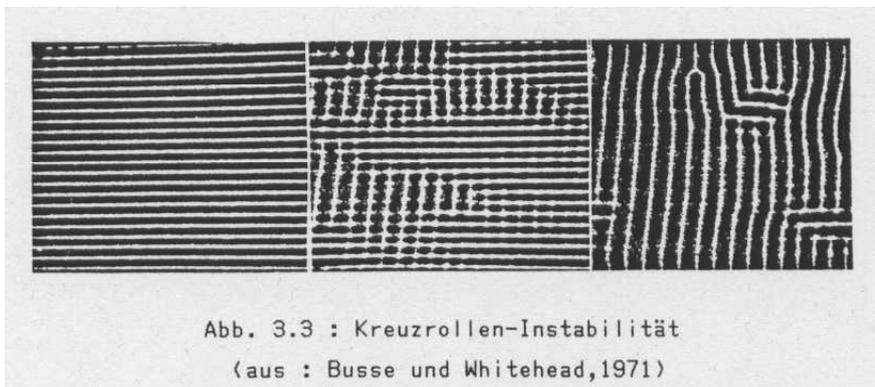
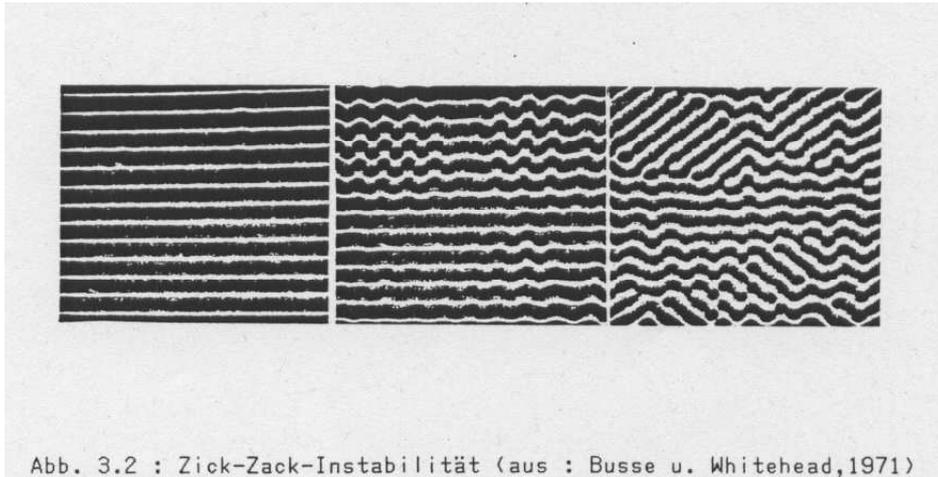


Abb. 3.1 : Der Busse-Ballon (aus : Busse, 1981)

3 Rayleigh-Benard-Konvektion aus der Sicht der Nichtlinearen Dynamik



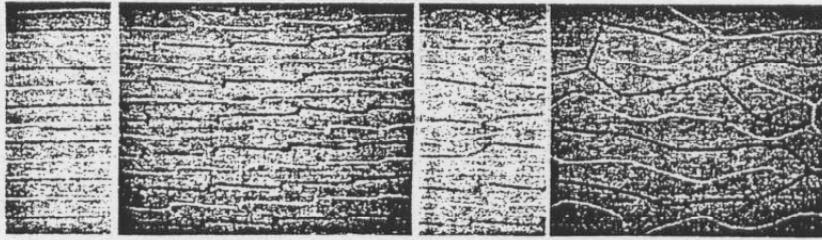


Abb. 3.5 : Skewed-varicose-Instabilität
(aus : Busse und Whitehead,1971)

3.2 Der Uebergang zur Turbulenz

Man hat nun einige Formen stationaerer Konvektion kennengelernt. Es ist jedoch anschaulich klar, dass sie fuer hoehere Rayleighzahlen, d. h. hoehere Energiezufuhr, nicht stabil bleiben koennen und bei Erreichen einer gewissen Grenze in turbulente Stroemungen umschlagen werden. Moegliche Wege von laminaren zu turbulenten Stroemungen sollen in diesem Abschnitt vorgestellt werden.

Bis zum Anfang der siebziger Jahre war die vorherrschende Theorie vom Uebergang zur Turbulenz die von Landau und Hopf. Die grundlegende Idee ist, dass der turbulente Zustand durch aufeinanderfolgende superkritische Hopf-Bifurkationen erreicht wird. Bei der ersten Bifurkation entsteht aus dem Fixpunkt (stationaerer Zustand) ein Grenzzyklus (periodische Loesung), wie in Kapitel 2 beschrieben. Eine weitere Bifurkation erhoecht die Dimension des Attraktors auf $d = 2$, ein invarianter Torus T^2 entsteht (Abb. 3.6). Durch sukzessive Bifurkationen entsteht aus diesem 2-Torus schliesslich ein n -Torus T^n .

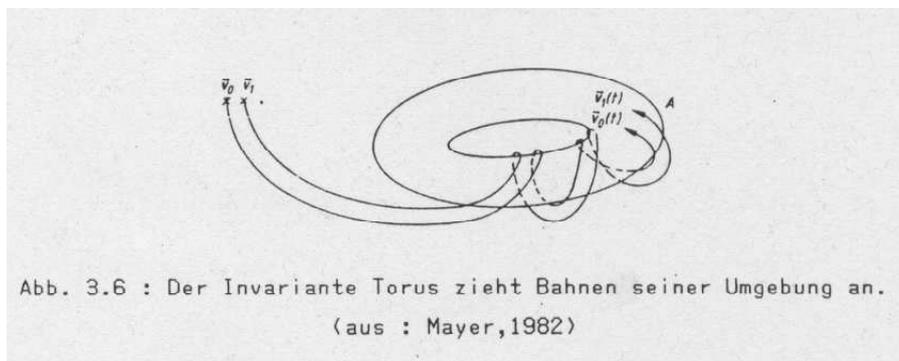


Abb. 3.6 : Der Invariante Torus zieht Bahnen seiner Umgebung an.
(aus : Mayer, 1982)

Es bleibt aber noch die Frage zu beantworten, wie die Bahnen auf solchen Tori aussehen. Der Argumentation Landaus (Mayer, 1982) folgend, sollten dies quasiperiodische Bewegungen mit n rational unabhängigen Frequenzen $\omega_1 \dots \omega_n$ sein. Rational unabhängig bedeutet, dass der Quotient $q_{ij} = \omega_i / \omega_j$ fuer $i \neq j$ irrational ist. Die Bahnen umwickeln dann den Torus dicht, die Bewegung ist aperiodisch. Bereits im Fall $n = 2$ wurde dieses Bild kritisiert. Ein Theorem von Peixoto (1962) besagt naemlich folgendes : Sei S die Teilmenge aller C^r -Vektorfelder auf dem 2-Torus, deren invariante Mannigfaltigkeit aus Fixpunkten oder periodischen Bahnen besteht. (C^r - bedeutet r -mal stetig differenzierbar). Dann ist S dichte und offene Teilmenge des Banachraumes aller C^r -Vektorfelder auf dem Torus. Alle Eigenschaften, die fuer solche Teilmengen gelten, heissen generisch. Wenn nun eine Bahnkurve asymptotisch auf einen Attraktor abgebildet wird, so wird dies 'generisch', d. h. nach Ruelle und Takens (1971) 'wahrscheinlich', ein Fixpunkt oder eine periodische Bahn sein, nicht aber eine quasi-periodische, da diese Bahnen nicht generisch sind.

Ruelle und Takens raechen im gleichen Artikel aber auch ein, dass die Gleichsetzung von 'generisch' und 'wahrscheinlich' im physikalischen Sinne zweifelhaft ist, da die Komplementaermengen zu offenen und dichten Teilmengen durchaus nicht verschwindendes Lebesgue-Mass haben koennen. Tatsaechlich koennten in Laborversuchen schon quasi-

periodische Stroemungen gefunden werden. Trotzdem sind zumindest zwei Aspekte der Landau-Hopf-Theorie mit experimentellen Ergebnissen nicht zu vereinbaren :

1. Das Spektrum einer Stroemung muesste auch nach einigen Bifurkationen immer noch aus scharfen Linien bestehen, deren Aufloesung letztlich eine der instrumentellen Genauigkeit waere. Die Spektren turbulenter Vorgaenge bestehen jedoch nicht aus diskreten Linien, sondern zeigen allenfalls stark verrauschte Frequenzbaender.
2. Die Autokorrelationsfunktion einer Funktion $f(t)$ ist definiert als

$$g(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \cdot \bar{f}(t + \tau) dt.$$

\bar{f} bezeichnet die konjugiert komplexe Funktion. Falls $f(t)$ quasiperiodisch ist, laesst es sich durch eine Fourierreihe darstellen :

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{-i\omega_n t}.$$

Die Autokorrelationsfunktion lautet dann

$$g(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |f_n|^2 e^{-i\omega_n \tau}$$

und hat fuer $\tau \rightarrow \infty$ keinen definierten Grenzwert. Die Autokorrelationsfunktion physikalischer Groessen nimmt jedoch in turbulenten Systemen mit der Zeit rasch ab.

Nach der Theorie von Ruelle und Takens ist nach der dritten superkritischen Hopf-Bifurkation das Auftreten eines seltsamen Attraktors generisch. In diesem Fall scheint der Ausdruck 'generisch' physikalisch relevanter zu sein als im Fall des 2-Torus, da bisher noch in keinem Experiment mehr als drei inkommensurable (rational unabhaengige) Frequenzen entdeckt werden konnten. Anders als die im zweiten Kapitel vorgestellten Uebergaenge zum Chaos fuehrt dieser neue Weg also ueber quasiperiodische Bewegungen zur Turbulenz.

Da die bisher vorgestellten Theorien voellig gleichberechtigt nebeneinander stehen und keine Aussagen ueber ihren Gueltigkeitsbereich gemacht werden koennen, fasst man sie zu sogenannten 'Szenarien' zusammen. Die Wahl des Begriffs 'Szenario' soll andeuten, dass die unter ihm zusammengefassten Ablaeufe unter bestimmten, nicht naeher definierten Voraussetzungen wahrscheinlich sind. Die bisher angesprochenen Szenarien sollen noch einmal kurz zusammengefasst werden.

- A)** Ruelle-Takens : Auftreten einiger superkritischer Hopf-Bifurkationen mit den zugehoerigen inkommensurablen Frequenzen., Turbulenz nach der vierten Bifurkation.
- B)** Feigenbaum : Turbulenz nach einer Kaskade von subharmonischen Bifurkationen.

3 Rayleigh-Benard-Konvektion aus der Sicht der Nichtlinearen Dynamik

C) Pomeau-Manneville : Uebergang zur Turbulenz durch Intermittenz (Sattel-Knoten-Bifurkation).

Es folgt die Beschreibung einiger Versuchsergebnisse, die von verschiedenen Autoren veröffentlicht worden sind und sich in das eine oder andere Szenario einordnen lassen. Auf die Angabe der Parameter Prandtlzahl (Pr), Querverhaeltnis (Γ , Verhaeltnis von maximaler horizontaler zu vertikaler Ausdehnung der Versuchsanordnung) sowie der Rayleighzahlen, bei deren Erreichen die einzelnen Bifurkationen auftreten, verzichte ich, da sie hier nur verwirren koennen :

Eine wie der Busse-Ballon systematische und uebersichtliche Lokalisierung verschiedener Bifurkationen im Parameterraum ist (noch) nicht moeglich. Es soll nur erwaeht werden, dass die im folgenden vorgestellten Experimente mit kleinen Querverhaeltnissen und Prandtlzahlen durchgefuehrt wurden, nur Berge et al. (1980) verwandten eine Fluessigkeit mit $Pr = 130$.

1. Maurer und Lichaber (1979, 1980).

Sie fanden bei verschiedenen Versuchsanordnungen folgende Uebergaenge (hier und im folgenden kennzeichnen nach rechts gerichtete Pfeile eine Erhoehung der Rayleighzahl) :

- a) Stationaere Konvektion \rightarrow Auftreten von f_1 mit Harmonischen \rightarrow Auftreten der inkommensurablen Frequenz $f_2 < f_1$ sowie der Kombinationen $mf_1 + nf_2$ (Abb. 3.7) \rightarrow 'Einrasten' von f_1 bei $6.5 \cdot f_2 \rightarrow$ 'Einrasten' von f_1 bei $7 \cdot f_2$ (Abb. 3.8) \rightarrow Turbulenz durch subharmonische Bifurkationen
- b) Stationaere Konvektion $\rightarrow f_1$ mit Harmonischen $\rightarrow f_2 < f_1$ und Kombinationen $mf_1 + nf_2 \rightarrow$ Turbulenz durch Intermittenz (Abb. 3.9 und 3.10)

2. Giglio, Muzzati und Perini (1981)

Sie konnten in ihrem Experiment zunaechst eine Grundfrequenz f und bei Steigerung der Rayleighzahl subharmonische Bifurkationen bis zu $f/16$ beobachten. Nach dieser Bifurkation konnten keine weiteren nachgewiesen werden, vielmehr schien das Auftreten einer inkommensurablen Frequenz die Kaskade zu unterbrechen. Die Feigenbaumkonstante konnte innerhalb der Messgenauigkeit bestaetigt werden.

3. Gollub und Benson (1980)

In ihren Versuchen zeigten sich vier verschiedene Uebergangsformen zur Turbulenz.

- a) stationaere Konvektion $\rightarrow f_2$ mit Harmonischen $\rightarrow f_1 < f_2$ und $mf_1 + nf_2 \rightarrow$ Einrasten bei $f_2/f_1 = 7/3 \rightarrow$ Turbulenz
- b) stationaere Konvektion $\rightarrow f_2 \rightarrow f_2/2 \rightarrow f_2/4 \rightarrow$ Turbulenz aeussert sich durch rasche Verbreiterung der Spektrallinien (Abb. 3.13)
- c) stationaere Konvektion $\rightarrow f_2 \rightarrow f_1 < f_2$ und $mf_1 + nf_2 \rightarrow f_3$ und Kombinationen $mf_1 + nf_2 + pf_3$ (Abb. 3.12) \rightarrow Turbulenz
- d) stationaere Konvektion $\rightarrow f_2 \rightarrow f_1 < f_2$ und $mf_1 + nf_2 \rightarrow$ Turbulenz durch Intermittenz (Abb. 3.13)

4. Berge et al. (1980)

Sie konnten nach Auftreten der ersten Frequenz f und der subharmonischen $f/2$ intermittentes Verhalten beobachten, wobei die intermittenten 'Ausbrueche' mit wachsender Rayleighzahl haeufiger auftraten und laenger andauerten (Abb. 3.14).

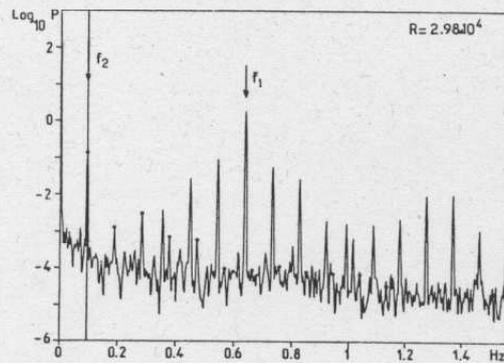


Abb. 3.7 : Fourierspektrum der lokalen Temperatur. Die schwarzen Punkte bezeichnen die Harmonischen von f_2 . Die beiden Frequenzen f_1 und f_2 sind inkommensurabel, alle auftretenden Linien sind Kombinationen $mf_1 + nf_2$ (aus : Maurer und Libchaber, 1979).

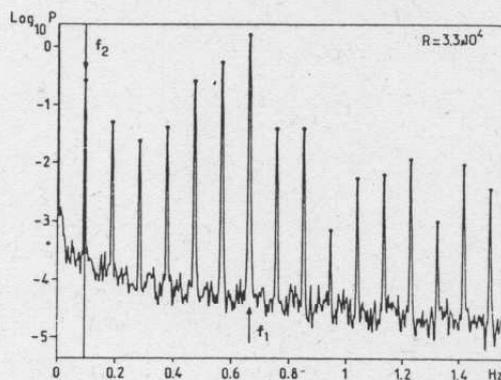
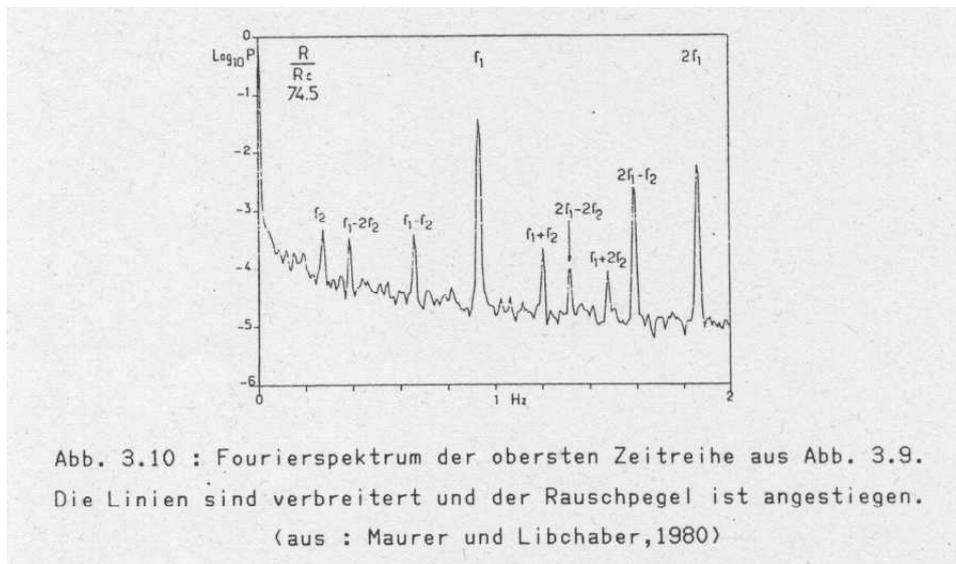
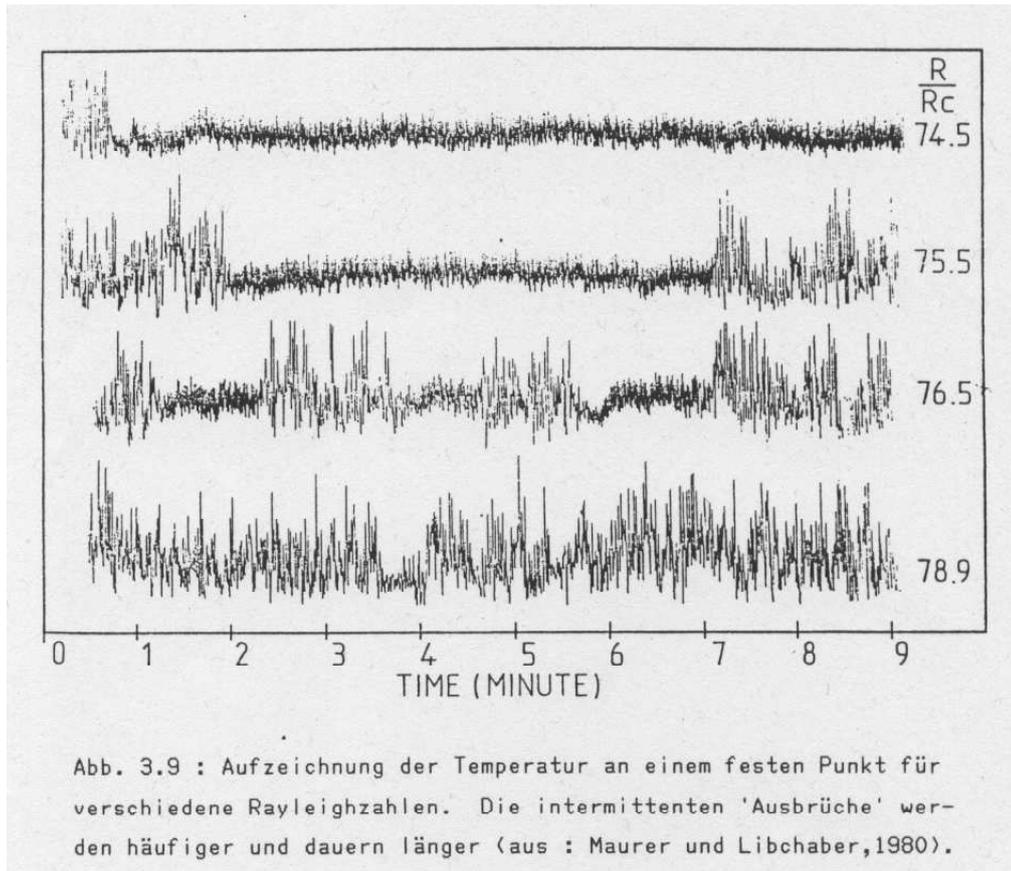


Abb. 3.8 : Wie oben, jedoch ist hier das 'Einrasten' von f_1 bei $7 f_2$ zu sehen. Alle Linien sind hier Harmonische von f_2 .
(aus : Maurer und Libchaber, 1979)

3 Rayleigh-Benard-Konvektion aus der Sicht der Nichtlinearen Dynamik



3.2 Der Uebergang zur Turbulenz

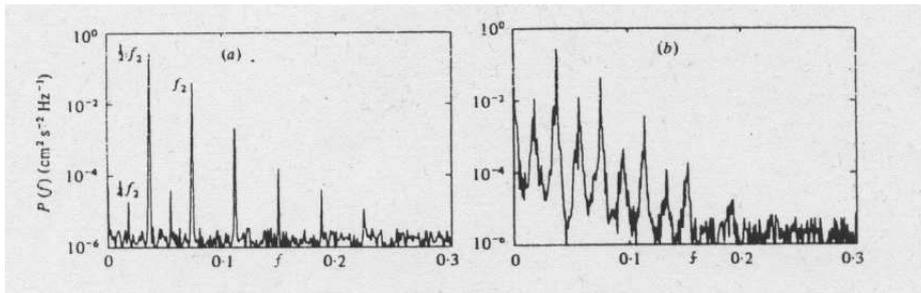


Abb. 3.11 : Fourierspektren von Geschwindigkeitsmessungen. In (a) ist die Frequenz f_2 mit den Subharmonischen $f_2/2$ und $f_2/4$ und deren Harmonischen zu erkennen. Bei geringer Erhöhung der Rayleighzahl verbreitern sich die Linien zu den Bändern in (b).
(aus : Gollub und Benson, 1980)

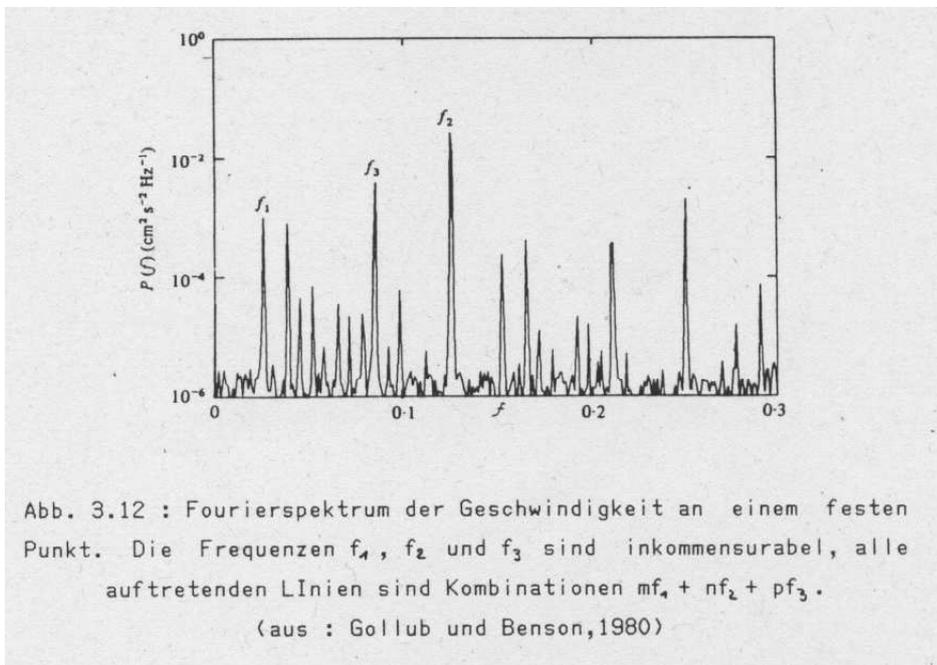
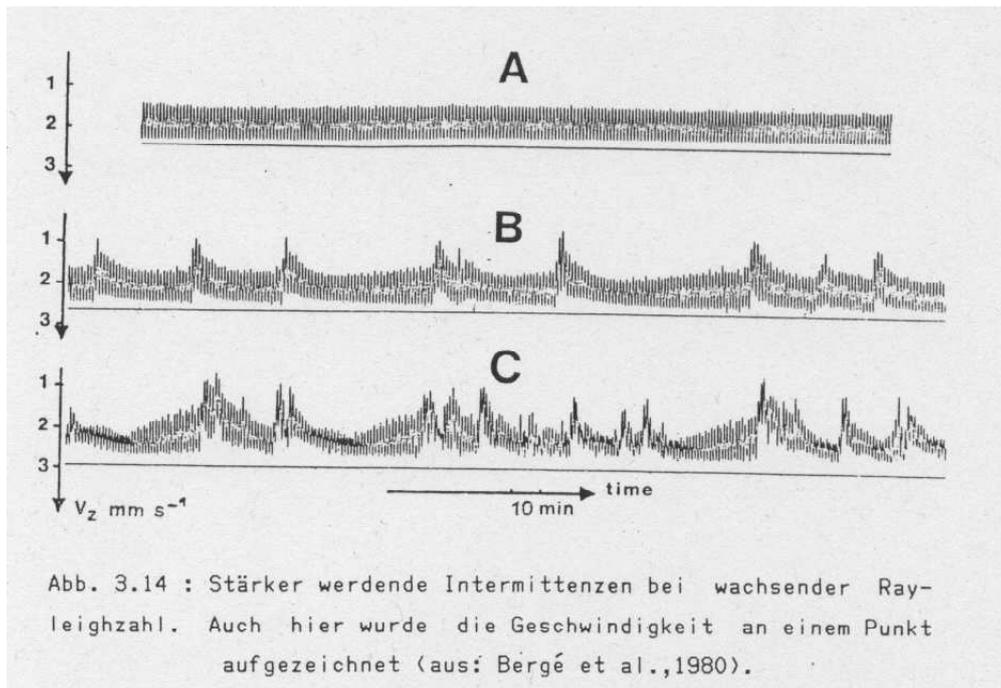
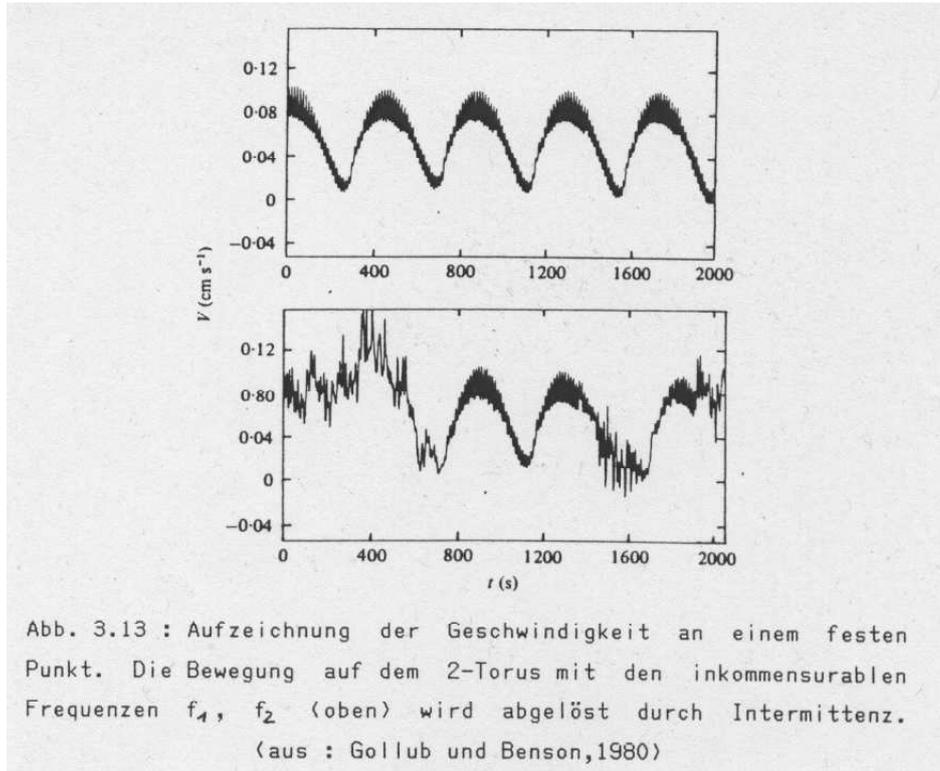


Abb. 3.12 : Fourierspektrum der Geschwindigkeit an einem festen Punkt. Die Frequenzen f_1 , f_2 und f_3 sind inkommensurabel, alle auftretenden Linien sind Kombinationen $mf_1 + nf_2 + pf_3$.
(aus : Gollub und Benson, 1980)

3 Rayleigh-Benard-Konvektion aus der Sicht der Nichtlinearen Dynamik



Das häufig beobachtete 'Einrasten' von Frequenzen in ein rationales Verhältnis ('frequency-locking') weist darauf hin, dass die Interpretation des Peixoto-Theorems durch Ruelle und

3.2 *Der Uebergang zur Turbulenz*

Takens unter gewissen Umstaenden gerechtfertigt ist, denn beim 'Einrasten' wird ja eine quasiperiodische Bahn instabil und ein Grenzyklus stabil. Vorgaenge wie das Auftreten von Intermittenz nach der ersten subharmonischen Bifurkation zeigen, dass die Ablaeufe innerhalb eines Szenarios nicht zwangslaeufig sind. Die Vermutung, dass diese Szenarien dennoch eine fuer die Hydrodynamik universelle Bedeutung haben, bestaetigen Versuche zur Stroemung zwischen zwie konzentischen Zylinder (Gollub und Swinney, 1975, Di Prima und Swinney, 1981).

3.3 Turbulenz

Die Attribute 'turbulent' bzw. 'chaotisch' werden vielen physikalischen Vorgaengen zugeschrieben, die jedoch voellig unterschiedlichen Charakter haben koennen. Wollte man z. B. das thermische Rauschen in einem Widerstand modellieren, so muesste man die Bahnen aller beteiligter Elektronen kennen. Die Anzahl der Freiheitsgrade des Systems ist sehr gross. Fuer schwach turbulente hydrodynamische Systeme sagt die Theorie die Existenz seltsamer Attraktoren niedriger Dimension voraus. Solche Systeme haben also nur eine geringe Anzahl von Freiheitsgraden und unterscheiden sich damit wesentlich vom thermisch rauschenden Widerstand.

Die im letzten Abschnitt vorgestellten Experimente bestaetigen die neue Turbulenztheorie in ihren Voraussagen ueber den Uebergang zur Turbulenz. Wie unterscheidet man jedoch zwischen Systemen mit sehr vielen Freiheitsgraden und Systemen, deren Entwicklung von Bewegungen auf einem niedrig-dimensionalen Attraktor bestimmt wird ? Die Fourieranalyse oder andere spektrale Methoden koennen hier nicht weiterhelfen, da beide Systeme mehr oder minder 'verrauschte' Spektren zeigen. Die Methoden zur Auffindung und Charakterisierung seltsamer Attraktoren beruhen darauf, dass diese Gebilde zwar eine komplizierte, aber dennoch wohldefinierte Struktur im D-dimensionalen Phasenraum haben. Die Dimension D des Phasenraumes entspricht der Anzahl der unabhaengigen Variablen, die noetig sind, um die Bewegung auf dem Attraktor zu beschreiben. Sie muss also grosser als die fraktale Dimension d des Attraktors sein, sollte aber fuer schwach turbulente Systeme auch nicht allzu gross ausfallen.

Welche Groessen eines hydrodynamischen Systems sind aber dazu geeignet, als unabhaengige Variable den Phasenraum aufzuspannen und so die Entwicklung des Systems vollstaendig zu beschreiben ? Im Falle endlich-dimensionaler Systeme gewoehnlicher Differentialgleichungen faellt die Antwort auf diese Frage nicht schwer, da man ja nur eine endliche Anzahl von Groessen zur Verfuegung hat. Es ist z. B. klar, dass die Amplituden X, Y und Z die unabhaengigen Variablen des Lorenz-Systems aus Kapitel 2 sind. In realen hydrodynamischen Systemen ist das anders, hier stehen unendlich viele physikalische Groessen zur Verfuegung, aus denen man eine endliche Anzahl zur Beschreibung des Systems auswaehlen muss. Den Ausweg aus diesem Dilemma zeigt nach Guckenheimer (1982) ein Theorem aus der Differentialtopologie : Es erlaubt die Wahl einer Messgrosse $f(t)$ und ihrer Werte $f(t + i\tau)$, $i = 1, \dots, n$, τ : Verschiebung, solange f eine Groesse ist, die kein aussergewoehnliches Verhalten zeigt und n gross genug gewaehlt ist.

Am Beispiel der Rayleigh-Benard-Konvektion in einer Anordnung mit kleinem Querverhaeltnis wird der Unterschied zwischen Groessen mit normalem und ausserordenlichen Verhalten deutlich. Beim Ueberschreiten der kritischen Rayleighzahl bilden sich einige wenige Konvektionsrollen mit stationaerem Temperatur- und Geschwindigkeitsfeld. Bei erhoehter Rayleighzahl bilden sich in der oberen und/oder unteren Grenzschicht zunaechst schwache thermische Instabilitaeten aus, die von der Hauptstroemung mitgefuehrt werden. Das Rollenmuster der Stroemung bleibt so erhalten, dass die Stoerungen der stationaeren Temperaturverteilung in Inneren der Rolle nicht registriert werden. Die

Temperatur im Inneren der Rolle spiegelt also nicht die zeitliche Entwicklung des gesamten Systems wider und ist so eine Grösse mit ausserordentlichem Verhalten.

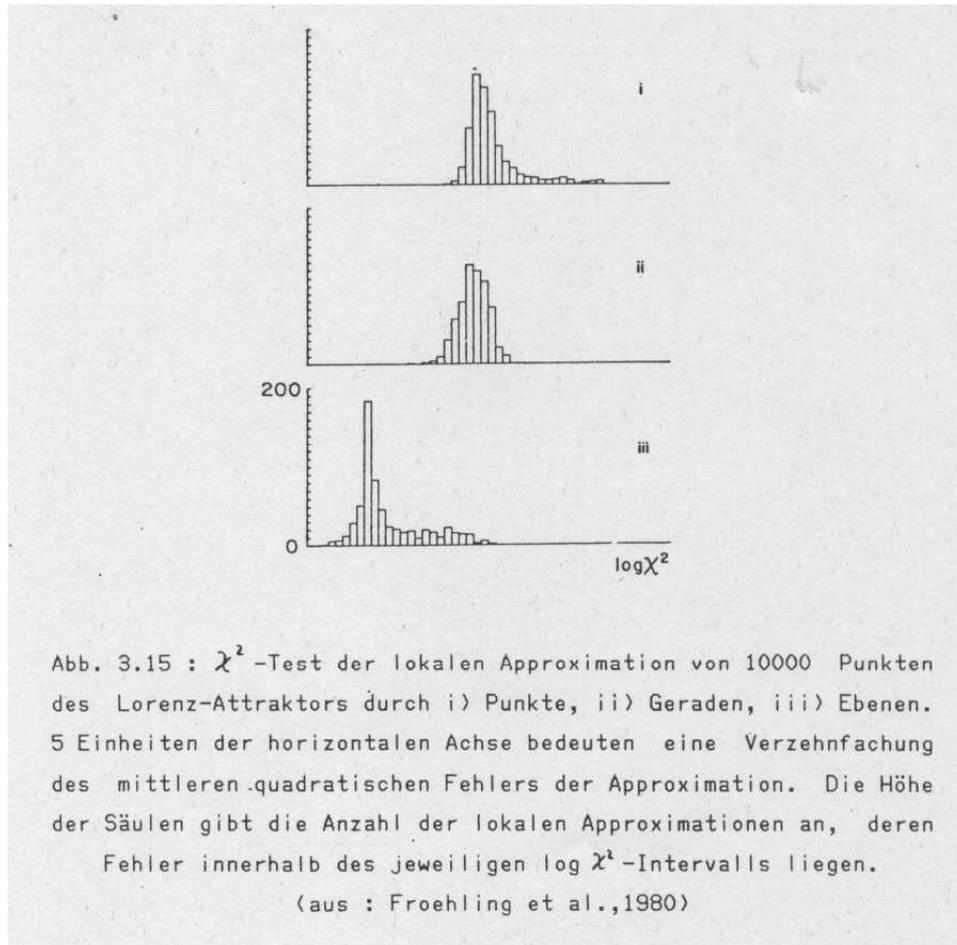
Es ist klar, dass man wenigstens das ungefähre Verhalten eines Systems kennen muss, um eine geeignete Messgrösse auszuwählen zu können. Hat man diese aber gefunden, so reicht im Prinzip die Aufzeichnung dieser einen Grösse, um die zeitliche Entwicklung des Systems innerhalb eines bestimmten Zeitraumes zu beschreiben. Hat man die Grösse f zu den Zeitpunkten $t_i = t_0 + (i - 1) \cdot \Delta t$, $i = 1, \dots, N$, Δt : Messintervall, N : Anzahl der Messwerte, aufgezeichnet, so wählt man eine zeitliche Verschiebung $\tau = n \cdot \Delta t$ und die gewünschte Dimension D des Phasenraumes. Die zeitliche Entwicklung des Systems in Phasenraum wird dann durch die Punkte

$$\underline{x}(t_i) = (x_1, \dots, x_D) = (f(t_1), f(t_1 + \tau), \dots, f(t_1 + (D - 1) \cdot \tau))$$

beschrieben.

Die einfachste Methode, Aufschluss über die Struktur der Punkte im Phasenraum zu bekommen, besteht darin, sie in einem D -dimensionalen Diagramm darzustellen. Seltene Attraktoren in Systemen mit gewöhnlichen Differentialgleichungen konnten mit diesem von Packard et al. (1980) vorgeschlagenen Verfahren rekonstruiert werden.

Froehling et al. (1980) haben ein Verfahren entwickelt, um die ungefähre Dimension eines Attraktors zu bestimmen. Sie teilen den Phasenraum in kleine D -dimensionale Kuben auf und approximieren die in den Kuben liegenden Punkte nacheinander durch Punkte, Geraden, Ebenen und Hyperebenen. Kommt die Dimension der Hyperebene der des Attraktors nahe, so wird die Approximation wesentlich besser sein als für kleinere Dimensionen. Das Ergebnis dieser Methode für 10.000 Punkte des Lorenz-Systems gibt die flächenhafte Struktur des Lorenz-Attraktors ($d = 2.06$) wieder (Abb. 3.15). Trotz der Erfolge dieser Methoden bei der Behandlung von Systemen mit gewöhnlichen Differentialgleichungen scheinen beide Verfahren aus zwei Gründen auf physikalische Messreihen nicht anwendbar :



1. Für höhere Dimensionen ($D \geq 4$) ist die graphische Darstellung der Punkte nicht mehr möglich. Die Aussagekraft von Projektionen in dreidimensionale Unterräume ist fraglich. Schon für $D = 3$ hängt das Aussehen einer Punktmenge stark vom Blickwinkel ab.

Die Nachteile des Verfahrens von Froehling et al. für $D \geq 4$ werden deutlich, wenn man die notwendige Anzahl der Messungen abschätzt. Normiert man die Kantenlänge des D -dimensionalen Kubus, der alle Punkte enthält, auf Eins, so benötigt man für die Zerlegung des Phasenraumes $N_0(L) = (1/L)^D$ Kuben der Kantenlänge L . Ist die Zerlegung fein genug, so werden nach Definition der fraktalen Dimension

$$d = \lim_{L \rightarrow 0} \frac{\ln(N(L))}{\ln(1/L)}$$

ungefähr $N(L) = (1/L)^d$ Kuben mindestens einen Punkt enthalten. Die Zerlegung darf aber nicht zu fein sein, da für die Approximation an eine Hyperebene der Dimension $D - 1$ mindestens $D + 1$ Punkte pro Kubus benötigt werden (wünschenswert sind mindestens $2(D + 1)$ Punkte). Die Anzahl der benötigten Punkte

betraegt also

$$N(L) = 2(D + 1) \cdot (1/L)^d.$$

Fuer $D = 4$, $d \approx 3$ und eine Aufloesung $1/L = 20$ benoetigt man bereits ca. 80.000 Messungen.

2. Auch fuer $D \leq 3$ haengt das Ergebnis beider Verfahren stark von der Wahl der unabhängigen Variablen ab (Packard et al., 1980, Froehling et al., 1981).

Falls eine experimentell ermittelte Zeitreihe also tatsaechlich die Struktur eines seltsamen Attraktors enthaelt, so wird es mit den beschriebenen Verfahren schwierig sein, diese Struktur zu finden.

Malraison et al. (1983) haben eine Methode entwickelt, mit der man zuverlaessig zwischen Systemen mit vielen Freiheitsgraden und solchen mit nur wenigen unterscheiden kann. Darueber hinaus ist es moeglich, seltsame Attraktoren als solche zu identifizieren und ihre Dimension zu messen. Der fuer diese Methode grundlegende Ansatz stammt von Grassberger und Procaccia (1983) und benutzt die Definition der integralen Korrelationsfunktion: Seien \underline{x}_i , $i = 1, \dots, N$ Punkte im D -dimensionalen Phasenraum, H die Heavysidefunktion, d.h.:

$$H(r) = \begin{cases} 0 & \text{fuer } r < 0 \\ 1 & \text{fuer } r \geq 0 \end{cases}$$

und $|\underline{x}_i - \underline{x}_j|$ der Abstand zweier Punkte (die zugrunde liegende Norm ist beliebig). Dann ist

$$\tilde{C}(r) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i,j=1}^N H(r - |\underline{x}_i - \underline{x}_j|) = \lim_{N \rightarrow \infty} C(r) \quad (3.8)$$

die integrale Korrelationsfunktion der Punktmenge.

Waehlt man bei endlichem N die Maximumsnorm, so gibt die Funktion

$$N_i(r) = N \cdot C_i(r) = \sum_{j=1}^N H(r - |\underline{x}_i - \underline{x}_j|) \quad (3.9)$$

fuer jedes i die Anzahl der Punkte an, die innerhalb des D -dimensionalen Kubus $K_{i,r}$ mit Zentrum \underline{x}_i und Kantenlaenge R liegen. Man kann $K_{i,r}$ als ein Element der Ueberdeckung der Punktmenge mit Kuben gleicher Kantenlaenge betrachten. Liegen die Punkte auf einem Attraktor der Dimension d , so benoetigt man fuer die Ueberdeckung (fuer kleine r) insgesamt $k(r) \sim r^{-d}$ Kuben. Die mittlere Anzahl der Punkte pro Kubus betraegt

$$\bar{N}(r) = N/k(r) \sim r^d.$$

Betrachtet man alle N moeglichen Zerlegungen, die von den Kuben $K_{i,r}$ mit der Kantenlaenge r und dem Zentrum \underline{x}_i , $i = 1, \dots, N$ ausgehen, so entspricht die ueber alle Zerlegungen gemittelte Anzahl der Punkte im Kubus $K_{i,r}$ der mittleren Anzahl der Punkte

3 Rayleigh-Benard-Konvektion aus der Sicht der Nichtlinearen Dynamik

pro Kubus einer einzelnen Zerlegung, solange N gross und r klein genug ist.

$$\bar{N}(r) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N N_i(r) \sim r^d.$$

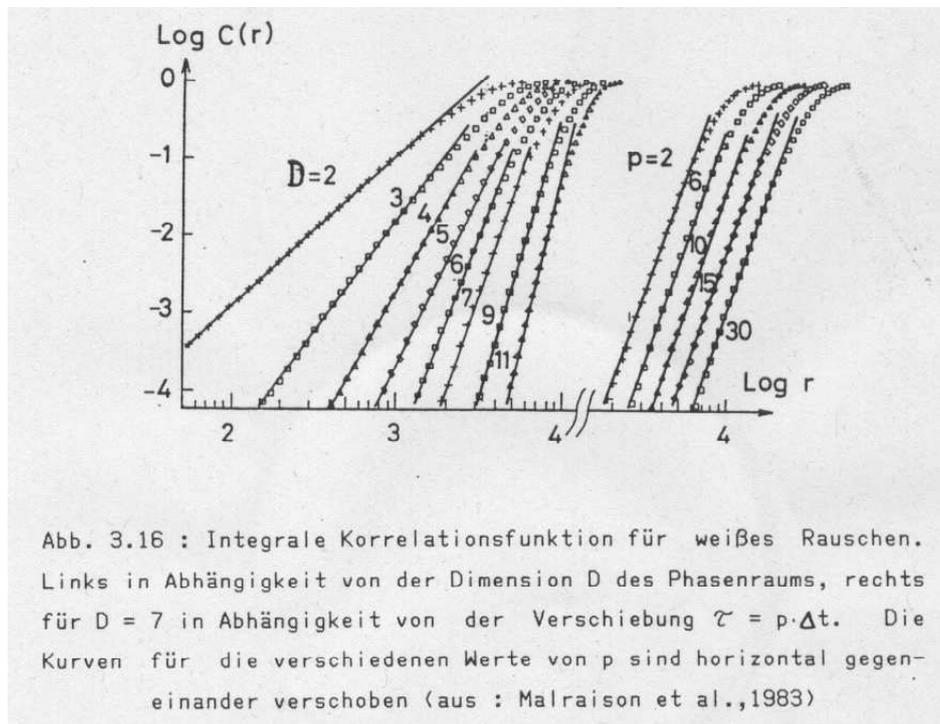
Einsetzen von (3.9) ergibt dann

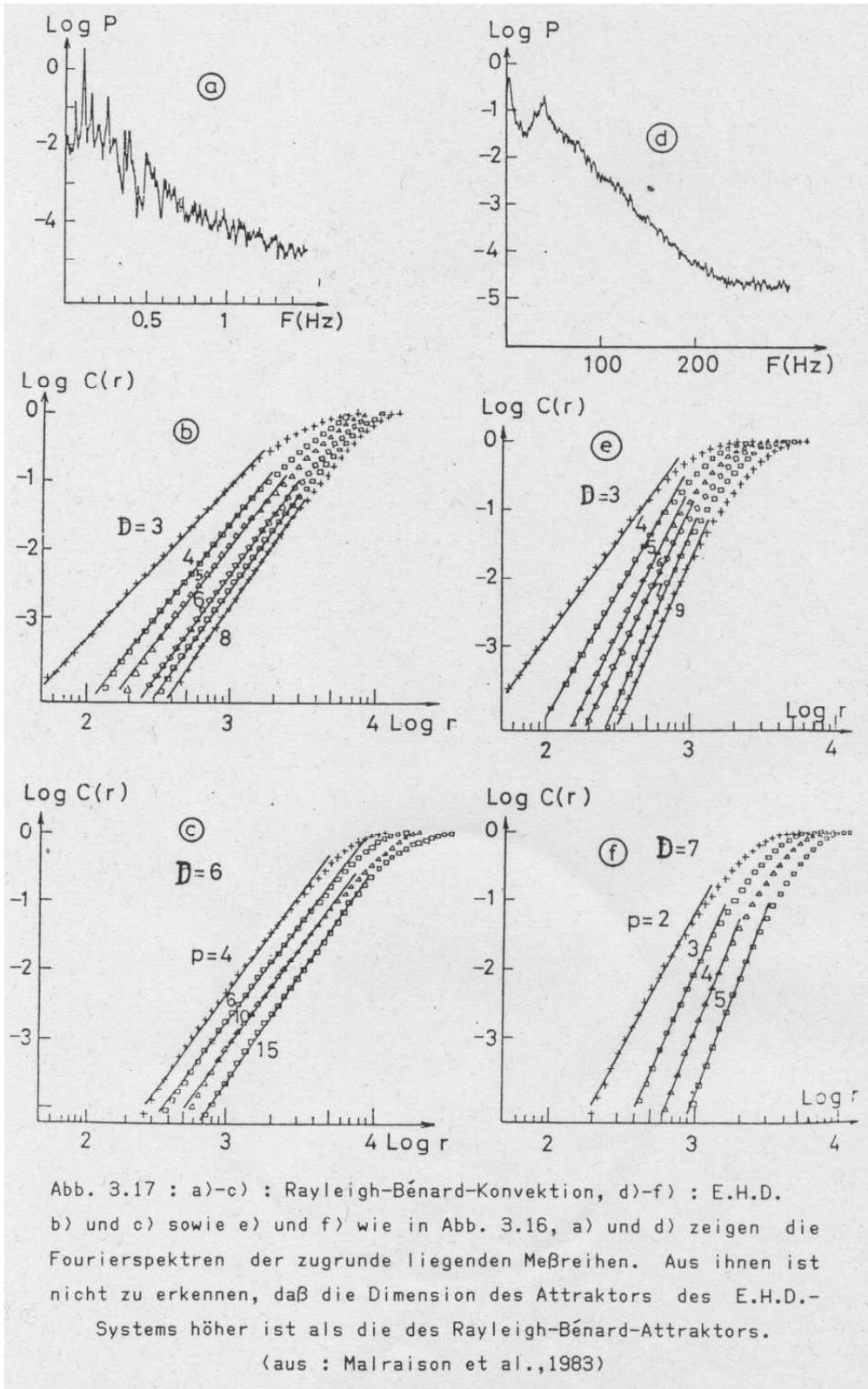
$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N C_i(r) = C(r) \sim r^d \quad (3.10)$$

Fuer 15000 Punkte des Lorenz-Systems bestimmten Grassberger und Procaccia die Dimension $d = 2.05 \pm .01$ in guter Uebereinstimmung mit dem theoretischen Wert $d = 2.06$.

Fuer Strukturen mit fraktaler Dimension gilt nach Malraison et al. (1983) die Proportionalitaet in (3.10) im Grenzwert $N \rightarrow \infty$ fuer jedes einzelne i . Steht eine grosse Anzahl von Messwerten zur Verfuegung, so reicht es aus, die Summation in (3.8) nicht ueber alle i auszufuehren. Malraison et al. (1983) haben dieses Verfahren weiterentwickelt. Sie berechnen die Summe in (3.8) nacheinander fuer immer hoechere Dimensionen des Phasenraumes, und zwar fuer die drei folgenden Zeitreihen :

1. Numerisch erzeugtes weisses Rauschen (Zufallszahlen)
2. Die Messung der lokalen Geschwindigkeit bei turbulenter Rayleigh-Benard-Konvektion
3. Die Messreihe einer Groesse aus einem Experiment zur Elektrohydrodynamik (E.H.D.)

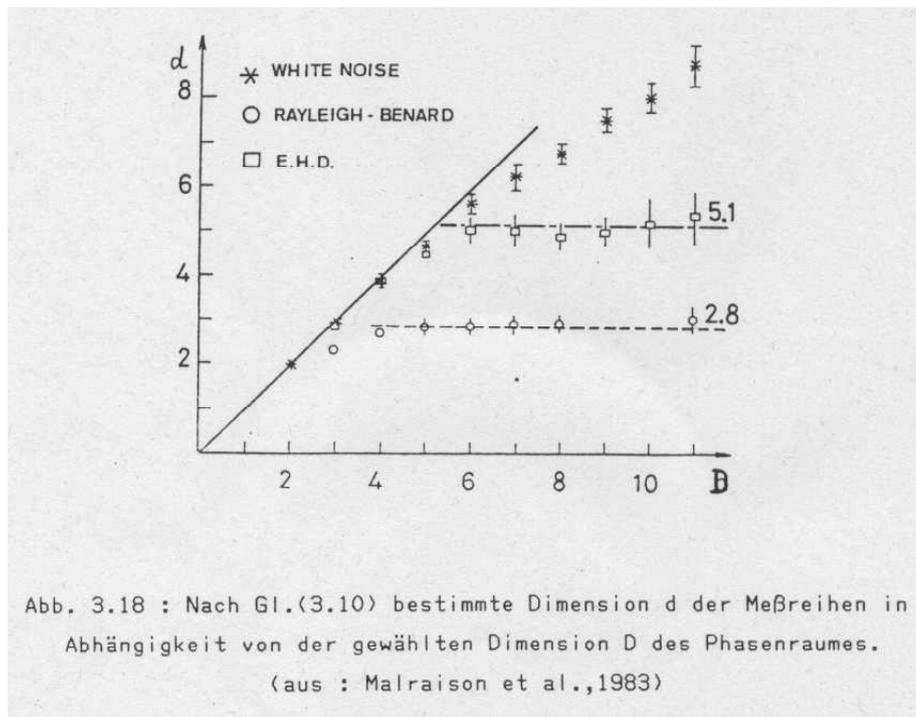




3 Rayleigh-Benard-Konvektion aus der Sicht der Nichtlinearen Dynamik

Die Ergebnisse dieses Vorgehens zeigen die Abbildungen (3.16)-(3.18). In den Abbildungen (3.16) und (3.17) kommt die Proportionalitaet aus (3.10) deutlich zum Ausdruck. Man sieht auch, dass dieses Ergebnis unabhängig von der Wahl der Verschiebung $\tau = p \cdot \Delta t$ (Δt : Messintervall) ist. In Abb. (3.18) sind fuer die verschiedenen Zeitreihen die Exponenten aus (3.10) in Abhängigkeit von der Dimension des Phasenraumes dargestellt. Der Exponent fuer weisses Rauschen waechst mit der Dimension immer weiter. Die Abweichung vom theoretisch erwarteten Verhalten $d = D$ deklariert Malraison et al. mit der begrenzten Anzahl der Punkte.

Die Exponenten der beiden anderen Reihen bleiben ab einer bestimmten Dimension nahezu konstant und deuten so auf die fraktale Dimension beider Punktmengen und die Existenz seltsamer Attraktoren hin.



Anhand dieser Methode ist es also nicht nur moeglich, Bewegungen auf seltsamen Attraktoren von stochastischen Prozessen zu unterscheiden, sondern mit der fraktalen Dimension den Turbulenzgrad einer Stroemung quantitativ zu ermitteln.

4 Eigene Experimente

Die im letzten Kapitel vorgestellten Experimente wurden alle in Anordnungen mit niedrigen Querverhaeltnissen durchgefuehrt. Verwendet wurden ausschliesslich Fluessigkeiten mit temperaturunabhaengiger Viskositaet. Diese Verhaeltnisse koennen fuer den Erdmantel kaum zutreffen. Die Tatsache, dass der Erdmantel in erster Naecherung die Gestalt einer Kugelschale hat, laesst sich in Laborversuchen nicht simulieren, jedoch ist der storende Einfluss der lateralen Begrenzungen in Versuchen mit grossem Querverhaeltnis sicherlich geringer. Die Viskositaet des Erdmantels varriert besonders stark in der unteren Grenzschicht, der D''-Schicht (Christensen, 1984). In unseren Versuchen wurde daher eine Fluessigkeit mit stark temperaturabhaengiger Viskositaet in einer Anordnung mit grossem Querverhaeltnis beobachtet.

Die Auswertung der Messdaten zeigt, dass im Bereich kleiner Rayleighzahlen langperiodische Variationen dominieren, waehrend bei hohen Rayleighzahlen kurzperiodische Schwankungen ueberwiegen, die durch Instabilitaeten der unteren Grenzschicht entstehen. In dieser Hinsicht verhalten sich die Stroemungen im Laborexperiment aehnlich wie simulierte Stroemungen unter Mantelbedingungen in zweidimensionalen numerischen Modellen (Jarvis, 1982, Hansen, 1985, persoenliche Mitteilung). Die Analyse der aufgenommenen Zeitreihen nach dem im letzten Kapitel vorgestellten Verfahren von Malraison et al. (1983) weist auf die Existenz seltsamer Attraktoren hin, deren Dimension mit der Rayleighzahl waechst.

4.1 Versuchsaufbau und Messgroessen

Als Fluessigkeit wurde fuer unsere Versuche Glycerin gewaehlt, da es eine hohe, temperaturabhaengige Viskositaet hat und billig zu beschaffen war. Die physikalischen Eigenschaften von Glycerin sind Tabelle 4.1 zu entnehmen.

Tabelle 4.1 : Physikalische Eigenschaften von Glycerin

Waermeleitfaehigkeit	λ	$283 + 0.14 \cdot T \text{ (C)}$	$10^{-3} \text{Wm}^{-1} \text{K}^{-1}$
thermischer Ausdehnungskoeffizient	α	0.5	10^{-3}K^{-1}
Waermekapazitaet	C_p	2400	$\text{Jkg}^{-1} \text{K}^{-1}$
Dichte	ρ	1230 ± 20	kgm^{-3}
kinematische Viskositaet	ν	19-42.5	$10^{-6} \text{m}^2 \text{s}^{-1}$

Der Behaelter fuer die Fluessigkeit bestand aus einem Glaskasten mit rechteckiger Grundflaeche ($0 \leq x \leq 80 \text{cm}, 0 \leq y \leq 40 \text{cm}$), der nach oben offen war. Aus der Hoehe der Fluessigkeitsschicht ($H = 3 \text{cm}$) errechnet sich das Querverhaeltnis zu $\Gamma = 26.67$. Da Glycerin hygroskopisch ist, wurde die Oberflaeche durch eine duenne Oelschicht von der Luft abgeschlossen. Der Veruchsaufbau bestand also eigentlich aus drei verschiedenen konvektiven Systemen, naemlich der Glycerinschicht, der Oelschicht und der Luft oberhalb der Oelschicht. Die gesamte Anordnung wurde von unten mit zeitlich konstanter Leistung elektrisch beheizt.

Gemessen wurden die Temperaturen an der Unterseite des Behaelters und innerhalb des Glycerins in der Naeh der unteren bzw. oberen Grenzflaeche an drei verschiedenen Punkten (x_i, y_i) , $i=1,3$ sowie an zwei Punkten die Lufttemperatur oberhalb der Fluessigkeit. Pro Versuch wurden also 11 Zeitreihen ermittelt, die mit einem Mehrkanal-Punktschreiber automatisch registriert wurden. Die genaue Beschreibung des Versuchsaufbaus und der Temperaturfuehler sind der Diplomarbeit von Kuth (1983) zu entnehmen.

Vers. Nr.	P[W]	Pr	Ra	Δt [s]	N
1	50	425	$5 \cdot 10^5$	25.1	1060
2	60	405	$6.5 \cdot 10^5$	24.3	1110
3	70	250	$12 \cdot 10^5$	26.6	1120
4	80	210	$17 \cdot 10^5$	24.3	1070
5	90	190	$22 \cdot 10^5$	21.7	2256

Tabelle 4.2 : Leistung P in Watt, Prandtlzahl Pr, Rayleighzahl Ra, Messintervall Δt in Sekunden sowie Anzahl der Messungen N in den Versuchen 1-5.

Da die Heizleistung und die Guete des Kontaktes zwischen Fluessigkeitsbehaelter und Heizungssystem in der horizontalen Ebene variierten, beschaenke ich mich im folgenden auf die Diskussion der Temperaturmessungen an einem festen Punkt $x = 52\text{cm}$, $y = 20\text{cm}$. Die Temperaturprofile an den beiden anderen Punkten liefern qualitativ die gleichen Ergebnisse. Die gemessenenen Temperaturen werden folgendermassen bezeichnet :

T_0 : Temperatur an der Grenzflaeche Heizung-Glasplatte

T_1 : Temperatur im unteren Teil der Glycerinschicht

T_2 : Temperatur im oberen Teil der Glycerinschicht

Insgesamt wurden 5 Versuche zur zeitabhaengigen Konvektion mit 5 verschiedenen Heizleistungen durchgefuehrt. Die charakteristischen Parameter Gesamtleistung (P), Prandtlzahl (Pr), und Rayleighzahl (Ra) sind Tabelle 4.2 zu entnehmen. Ferner sind dort die Messintervalle Δt und die Anzahl der Messungen N aufgefuehrt. Zu den Zahlenwerten in dieser Tabelle ist folgendes zu sagen :

1. Die Viskositaet von Glycerin ist stark temperaturabhaengig. Der zur Bestimmung von Prandtl- und Rayleighzahl benoetigte Wert wurde anhand der zeitlich gemittelten Temperatur im unteren Teil der Fluessigkeit, T_1 , bestimmt.
2. Waehrend der einzelnen Versuche variierte die Temperatur an der Unterseite der Glasplatte relativ zu den Temperaturen im Glycerin nur schwach, so dass sie im weiteren als konstant angenommen werden kann. Die Art der thermischen Randbedingung an der Grenzflaeche zwischen Glas und Fluessigkeit ergibt sich dann nach Normand et. al. (1977) aus der Waermeleitfaehigkeit und der Dicke der Glasplatte. Eine exakt isotherme Randbedingung erhaelt man fuer ideale Waermeleiter bzw. sehr duenne Platten, konstanten Waermefluss fuer schlechte Waermeleiter bzw. dicke Platten.

Die in Kapitel 2 angegebene Definition der Rayleighzahl beruht auf isothermen

4 Eigene Experimente

Randbedingungen. Nach Roberts (1967) lautet die entsprechende Groesse fuer konstanten Waermefluss

$$\text{Ra} = \frac{\alpha g \rho C_p F H^4}{\nu \kappa^2}.$$

Die einzige neu auftretende Groesse ist der Waermefluss F . Im Fall der Waermeleitung sind beide Definitionen aequivalent, die kritischen Rayleighzahlen fuer den Einsatz von Konvektion also gleich. Die von uns verwendete Glasplatte entspricht weder dem einen noch dem anderen Grenzfall, so dass die untere thermische Randbedingung nicht exakt definiert werden kann. Da die gemessenen Temperaturen T_1 und T_2 wegen der Ausdehnung der Temperaturfuehler nicht die exakten Temperaturen in der unteren bzw. oberen Grenzflaeche der Fluessigkeit wiedergeben, konnte die Temperaturdifferenz ueber die gesamte Fluessigkeitsschicht und damit die Rayleighzahl nach Rayleigh nicht bestimmt werden. Die gleichen Gruende verhinderten auch die Messung der Temperaturdifferenz zwischen Ober- und Unterseite der Glasplatte und damit die Ermittlung der Rayleighzahl nach Roberts. Um trotzdem zumindest die Groessenordnung der Rayleighzahl abschuetzen zu koennen, wurde der mittlere Waermefluss F aus der Gesamtleistung P und der Grundflaeche A der Versuchsanordnung nach $F = P/A$ bestimmt.

Da ein Teil der Heizenergie nicht dem konvektiven System zugefuehrt wurde, sondern durch die Seitenflaechen des Heizungssystems an die Luft abgefuehrt wurde, sind die in Tabelle 4.2 angegebenen Rayleighzahlen als obere Grenzen anzusehen.

4.2 Auswertung der Messungen

4.2.1 Verwendete Zeitreihen

Die Abbildungen 4.1 a-e zeigen die gemessenen Temperaturen T_1 (obere Kurven) und T_2 fuer die Versuche 1 bis 5. Sie zeigen folgende auffaellige Merkmale :

1. Die groessten Amplituden haben in allen Versuchen die langperiodischen Schwankungen. Waehrend bei Versuch 5 die Schwankungen mit Perioden von ungefaehr 500 Minuten (Temperaturmaxima bei Null bzw. 500, Minima bei ca. 250 und 800 Minuten) eindeutig durch Variationen der Raumtemperatur verursacht wurden, kann der Ursprung der langen Perioden zwischen ca. 30 Minuten und 3 Stunden in den Versuchen 1 bis 4 nicht eindeutig festgelegt werden. Das ist folgendermassen zu erklaren :

Als erstes Experiment wurde Versuch 5 durchgefuehrt. Als festgestellt wurde, dass Schwankungen der Raumtemperatur in den Messreihen wiederzufinden waren, wurde die gesamte Versuchsanordnung besser gegen die Umgebung isoliert und die Versuchsdauer herabgesetzt, so dass die folgenden Versuche waehrend 'thermisch ruhiger' Zeiten, in denen die Raumtemperatur nur schwach variierte, durchgefuehrt werden konnten.

Der Ursprung der erwaehten langperiodischen Temperaturschwankungen in den Versuchen 1 bis 4 koennte in einem langsamen 'Wandern' des Stroemungsmusters liegen, das von Manneville (1983) in einem numerischen Konvektionsmodell entdeckt wurde und charakteristisch fuer Systeme mit grossem Querverhaeltnis zu sein scheint (Ahlers und Behringer, 1978). Da bei unseren Versuchen das Stroemungsmuster nicht beobachtet werden konnte, bleibt diese Deutung, wenn auch physikalisch sinnvoll, spekulativ.

2. Der Temperaturverlauf im oberen Teil der Fluessigkeit ist in allen Versuchen 'unruhiger' als der im unteren Teil, d. h. kurzperiodische Temperaturschwankungen sind im oberen Teil haeufiger und staerker. Sie beruhen wahrscheinlich darauf, dass Temperaturvariationen von den konvektiven Systemen Luft und Oelschicht auf das Glycerin uebertragen werden. Die Tatsache, dass sie im unteren Teil der Fluessigkeit nicht mehr beobachtet werden koennen, spricht fuer diese Erklaerung.
3. Allgemein nehmen die Amplituden der Temperaturvariationen, wie erwartet, mit wachsender Rayleighzahl zu.

4 Eigene Experimente

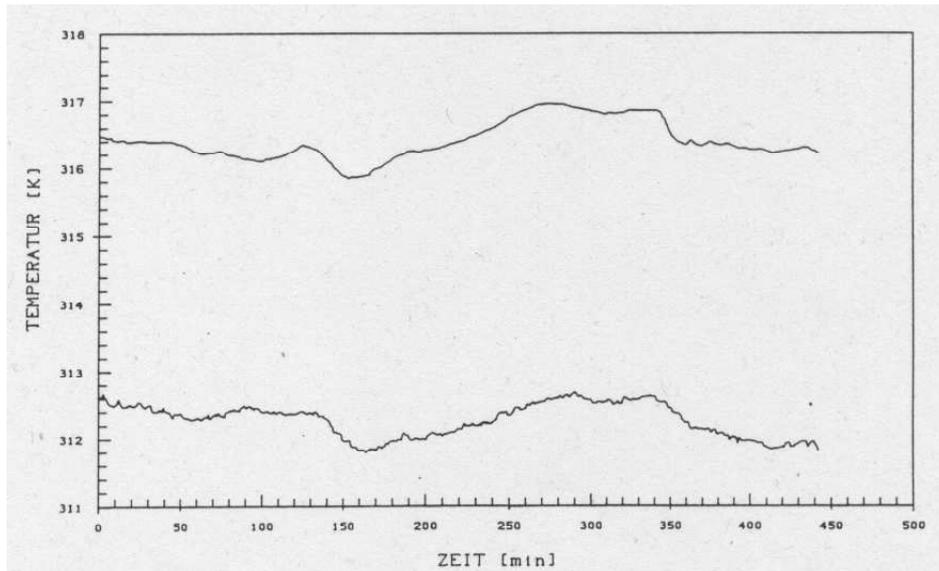


Abb. 4.1 a : Aufzeichnung der Temperaturen an der Unterseite (obere Kurve) und der Oberseite der Glycerinschicht für Versuch 1. Die Temperaturaufzeichnungen aus den Versuchen 2 bis 5 sind in den Abbildungen 4.1 b-e zu finden.

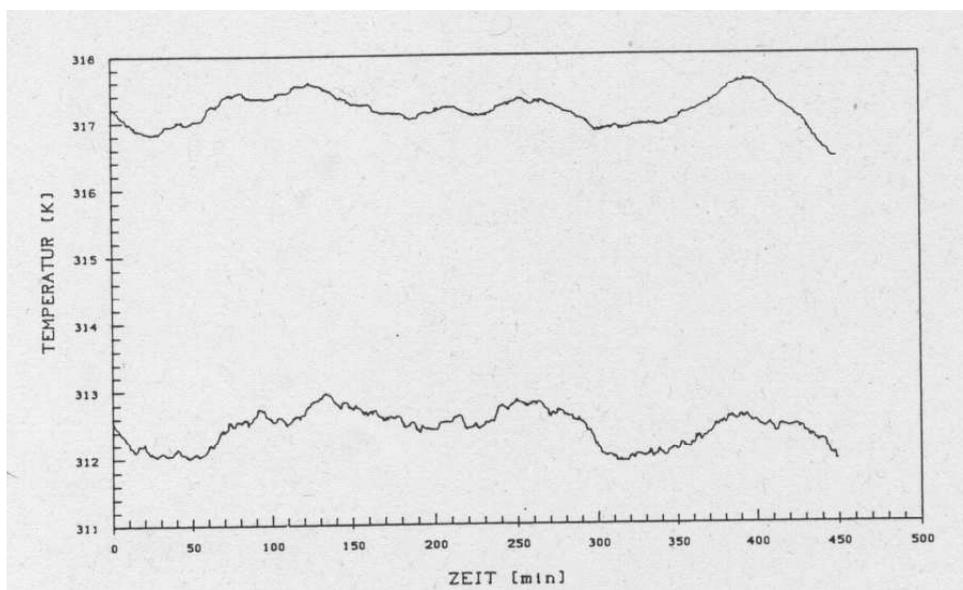
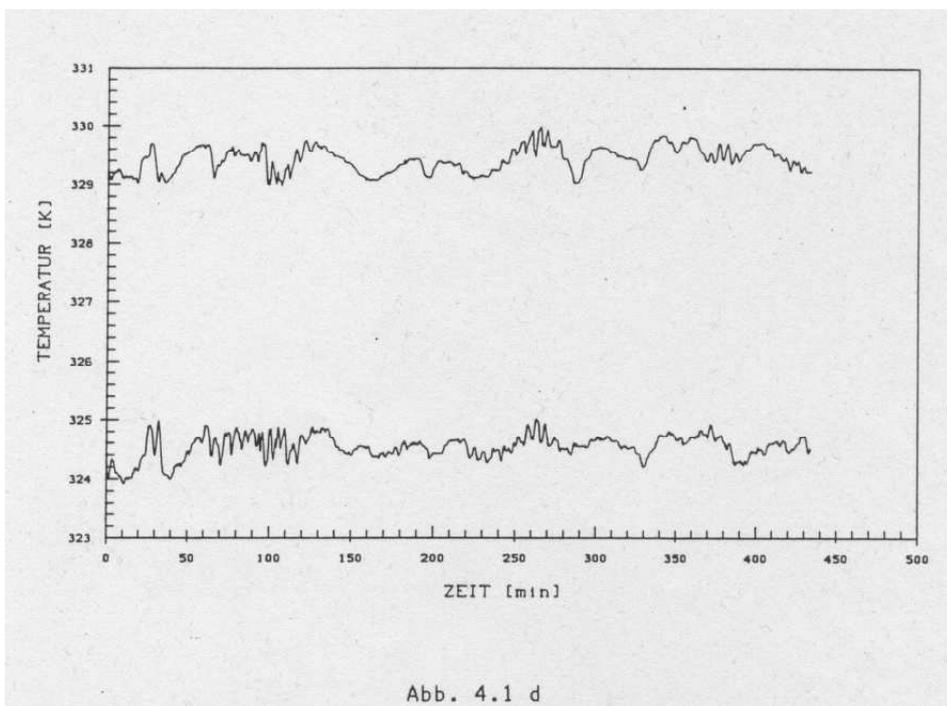
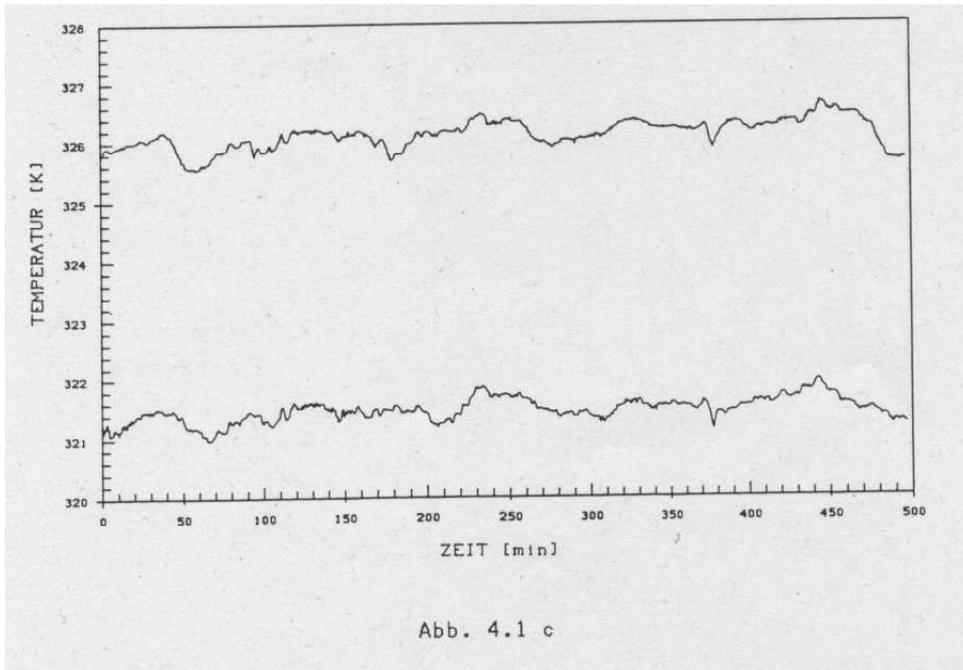
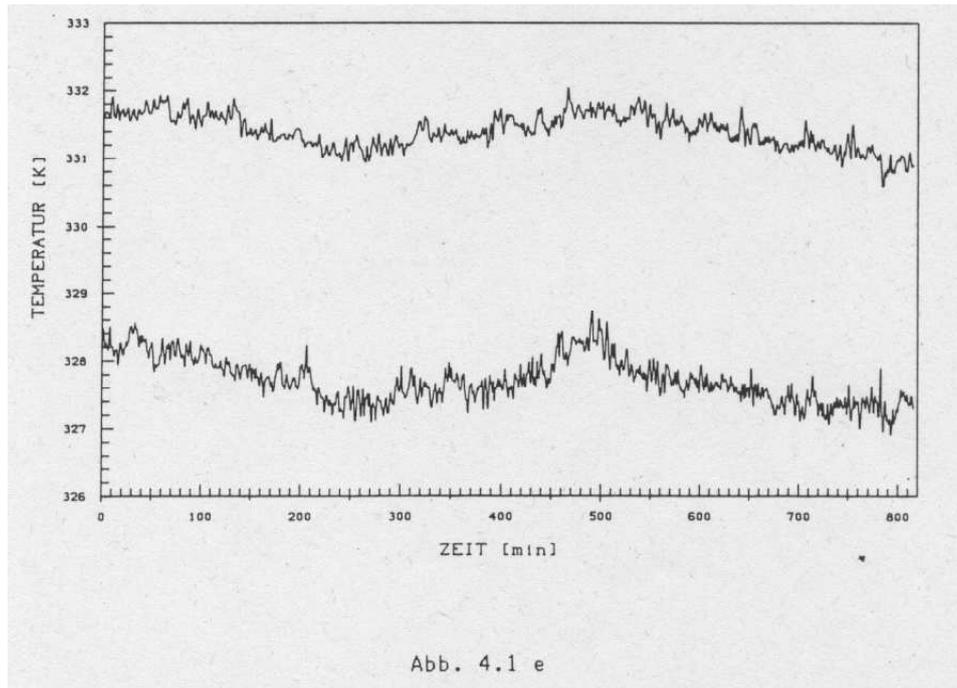


Abb. 4.1 b

4.2 Auswertung der Messungen



4 Eigene Experimente



4.2.2 Spektralanalyse der Zeitreihen

In den Abbildungen 4.2 a-j sind die Leistungsspektren der Messreihen aus den Versuchen 1 bis 5 dargestellt. Die Berechnung der Spektren erfolgte mittels der von Jenkins und Watts (1968) beschriebenen Methode mit dem Tukey-Fenster der Breite 200 fuer die Versuche 1 bis 4 bzw. 400 fuer Versuch 5. Allen Spektren ist das deutliche Maximum bei niedrigen Frequenzen gemeinsam, das durch die hohen Amplituden der langperiodischen Temperaturvariationen entsteht. Abgesehen von diesem Maximum finden sich in keinem Spektrum scharfe Linien, lediglich in den Spektren zu Versuch 4 sind einige Frequenzbaender zu erkennen.

Die Form der Spektren der Versuche 1 bis 3 sind charakteristisch fuer schwach turbulente Konvektionssysteme mit grossem Querverhaeltnis (Ahlers und Behringer, 1978). Die bei Versuch 4 auftretenden Frequenzbaender haben eine schwache Aehnlichkeit mit den von Gollub und Benson (1980) beim intermittenten Uebergang zur Turbulenz gefundenen (Abb. 3.11). Diese Frequenzbaender sind in den Spektren aus Versuch 5 kaum noch zu erkennen. In diesen Spektren ist die Energie zwischen 0.1 und 0.7 min gegenueber den Versuchen 1-3 um etwa eine Groessenordnung angehoben.

Die Stroemungen in den Versuchen 1-3 gehoeren wahrscheinlich dem gleichen konvektiven Bereich an, in dem langperiodische Schwankungen dominieren. Sie unterscheiden sich graduell in der Staerke der kurzperiodischen Variationen. Demgegenueber sind die in Versuch 5 registrierten Zeitreihen sicherlich Ausdruck einer Stroemungsform, die wesentlich von kurzperiodischen Variationen gepraeagt wird.

Mit optischen Mitteln konnte in diesem Versuch beobachtet werden, dass die Temperaturschwankungen dadurch entstehen, dass sich von der unteren Grenzflaeche Ballen heisser Fluessigkeit ('Blobs') abloesen oder zeitweise schmale Bereiche heisser, aufwaerts gerichteter Stroemungen ('Plumes') entstehen. Die starken langperiodischen Variationen sind hier auf Schwankungen der Raumtemperatur zurueckzufuehren. Die in letzten Abschnitt erwaehte verbesserte Isolierung der Versuchsanordnung verhinderte die optische Beobachtung der Stroemungen in den Versuchen 1-4. Moeglicherweise finden zwischen den Rayleighzahlen von Versuch 3 und Versuch 5 mehrere Bifurkationen statt. Die erwaehte schwache Aehnlichkeit mit den Spektren von Gollub und Benson legt diese Vermutung nahe.

4 Eigene Experimente

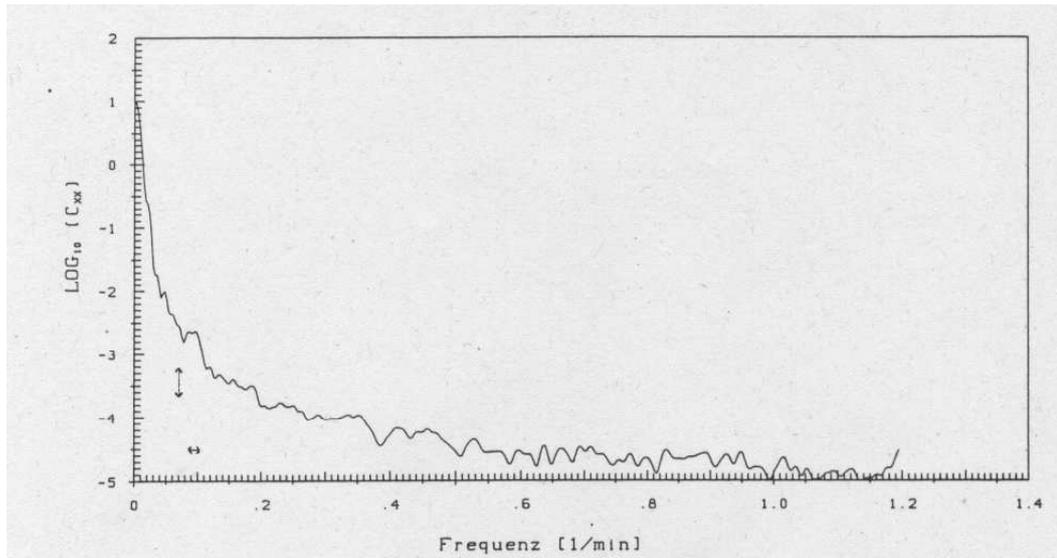


Abb. 4.2 a : Leistungsspektren der Temperatur T_A aus Versuch 1. C_{xx} (Einheit: $K^2 \text{min}$) wurde nach der Methode von Jenkins und Watts (1968) bestimmt. Der horizontale Pfeil bezeichnet die Bandbreite, der vertikale das 80%-Konfidenzintervall. Das 95%-Konfidenzintervall ist in allen Spektren ($0.56 C_{xx}$, $2.5 C_{xx}$).

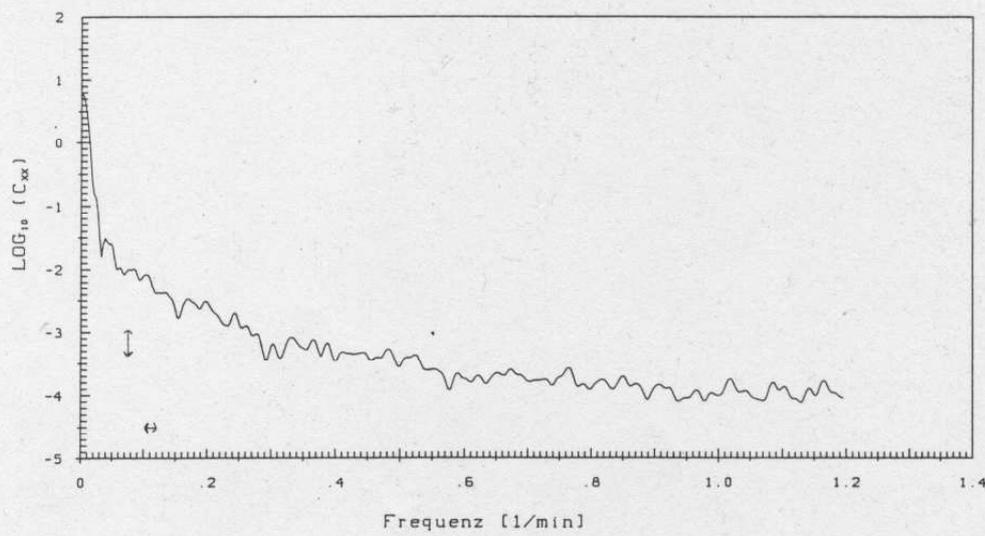


Abb. 4.2 b : Leistungsspektrum der Temperatur T_2 aus Versuch 1.

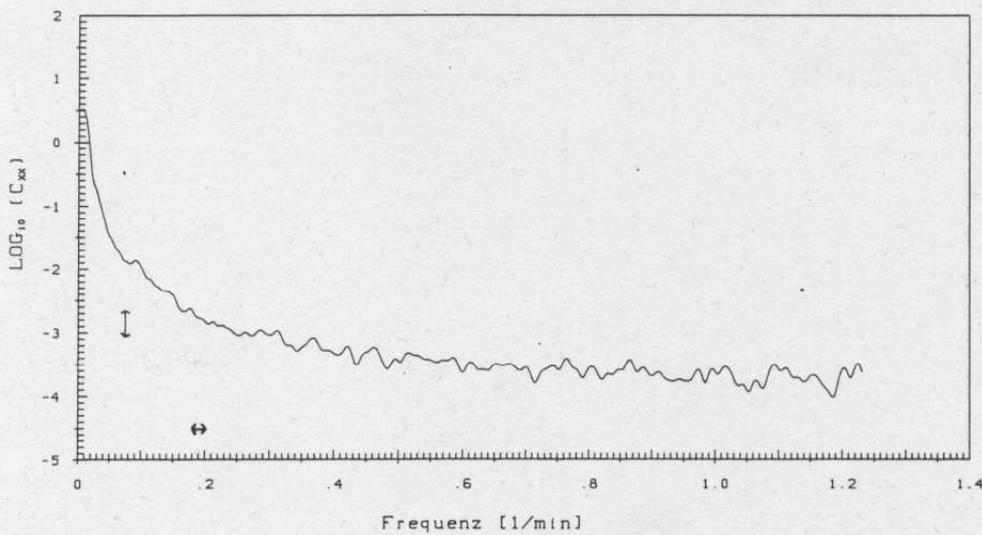


Abb. 4.2 c : Leistungsspektrum der Temperatur T_1 aus Versuch 2.

4 Eigene Experimente

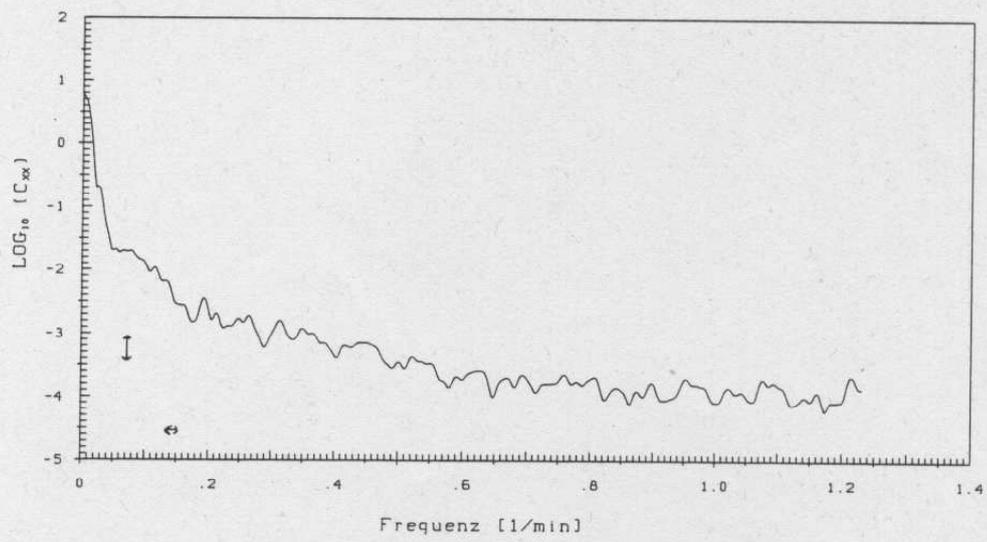


Abb. 4.2 d : Leistungsspektrum der Temperatur T_2 aus Versuch 2.

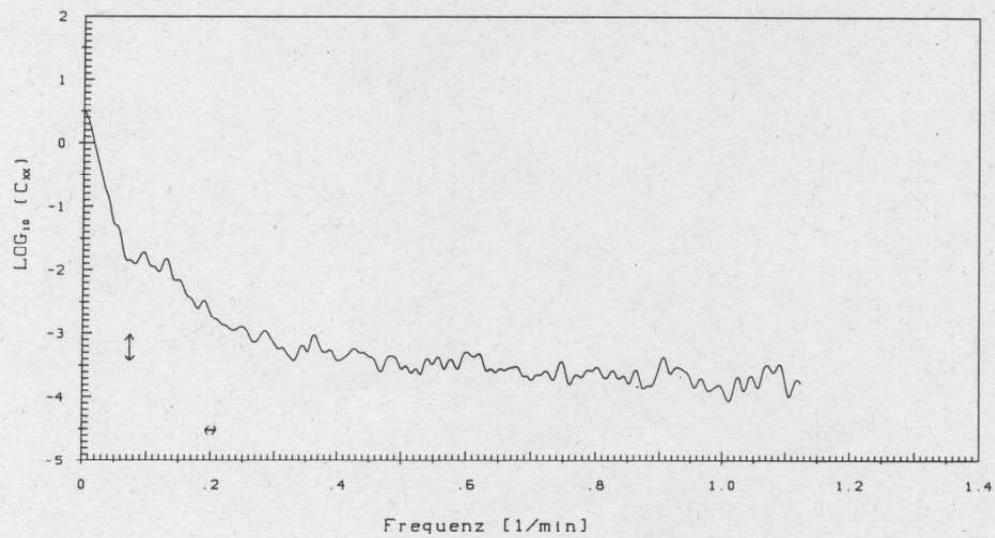


Abb. 4.2 e : Leistungsspektrum der Temperatur T_4 aus Versuch 3.

4.2 Auswertung der Messungen

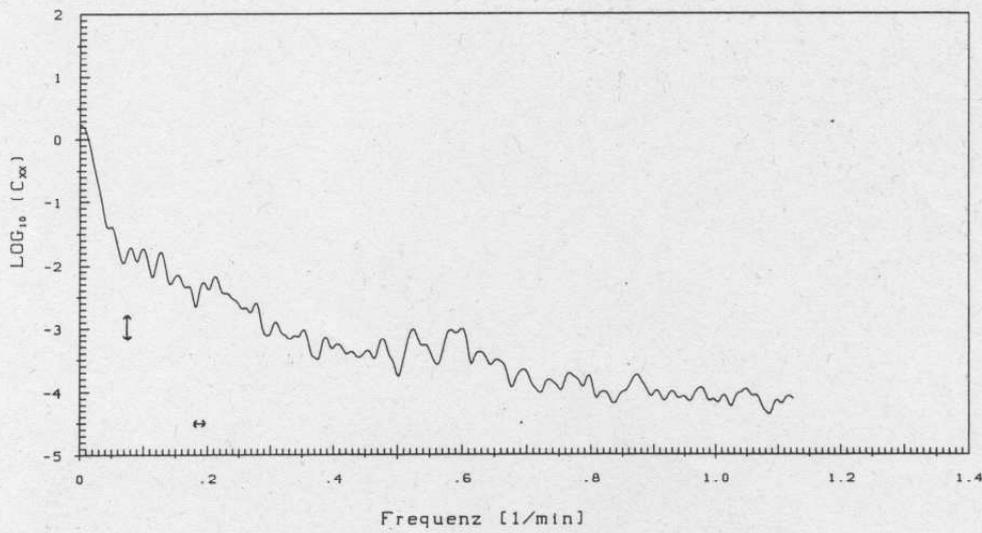


Abb. 4.2 f : Leistungsspektrum der Temperatur T_2 aus Versuch 3.

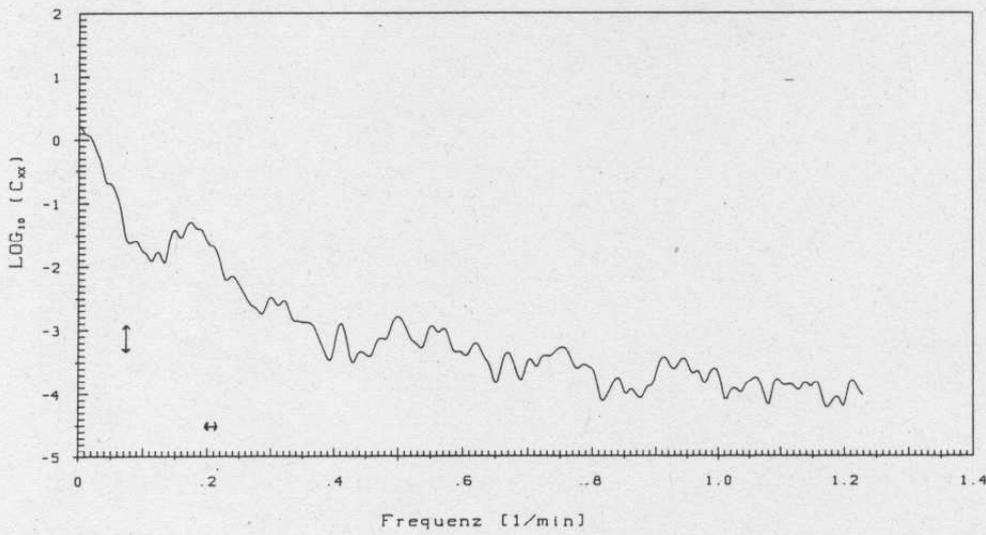
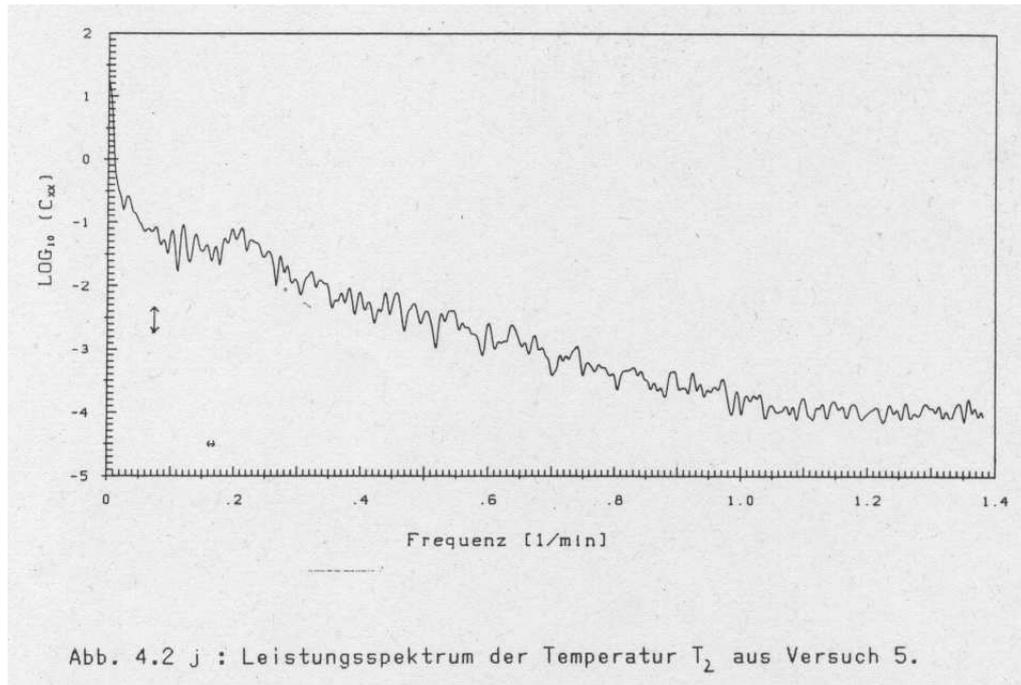


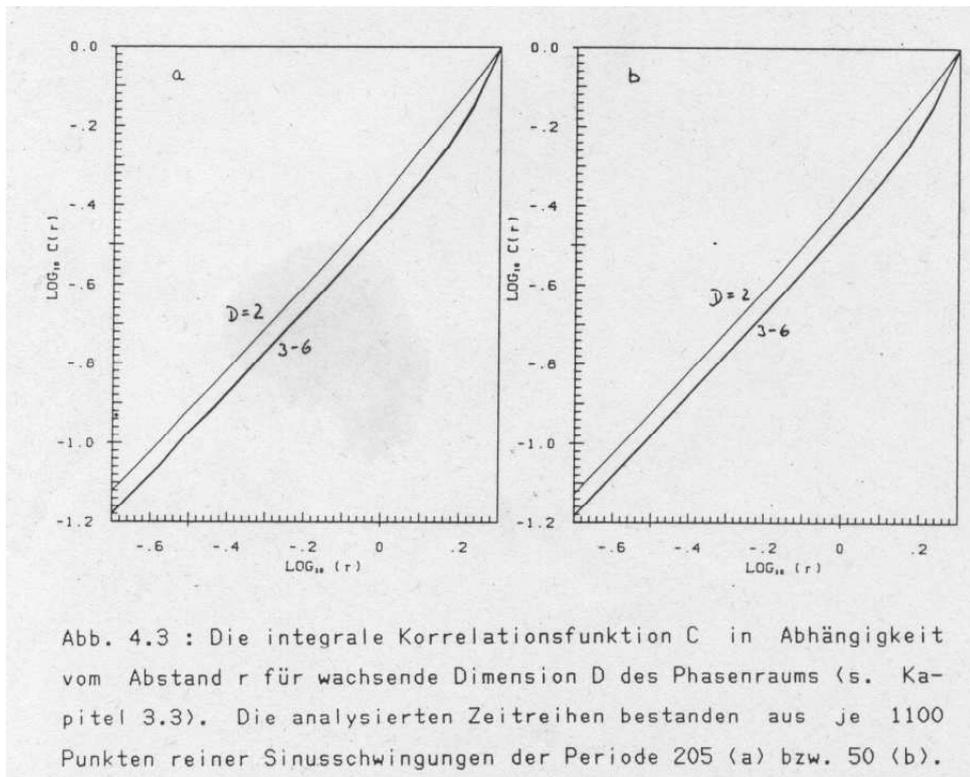
Abb. 4.2 g : Leistungsspektrum der Temperatur T_1 aus Versuch 4.

4 Eigene Experimente

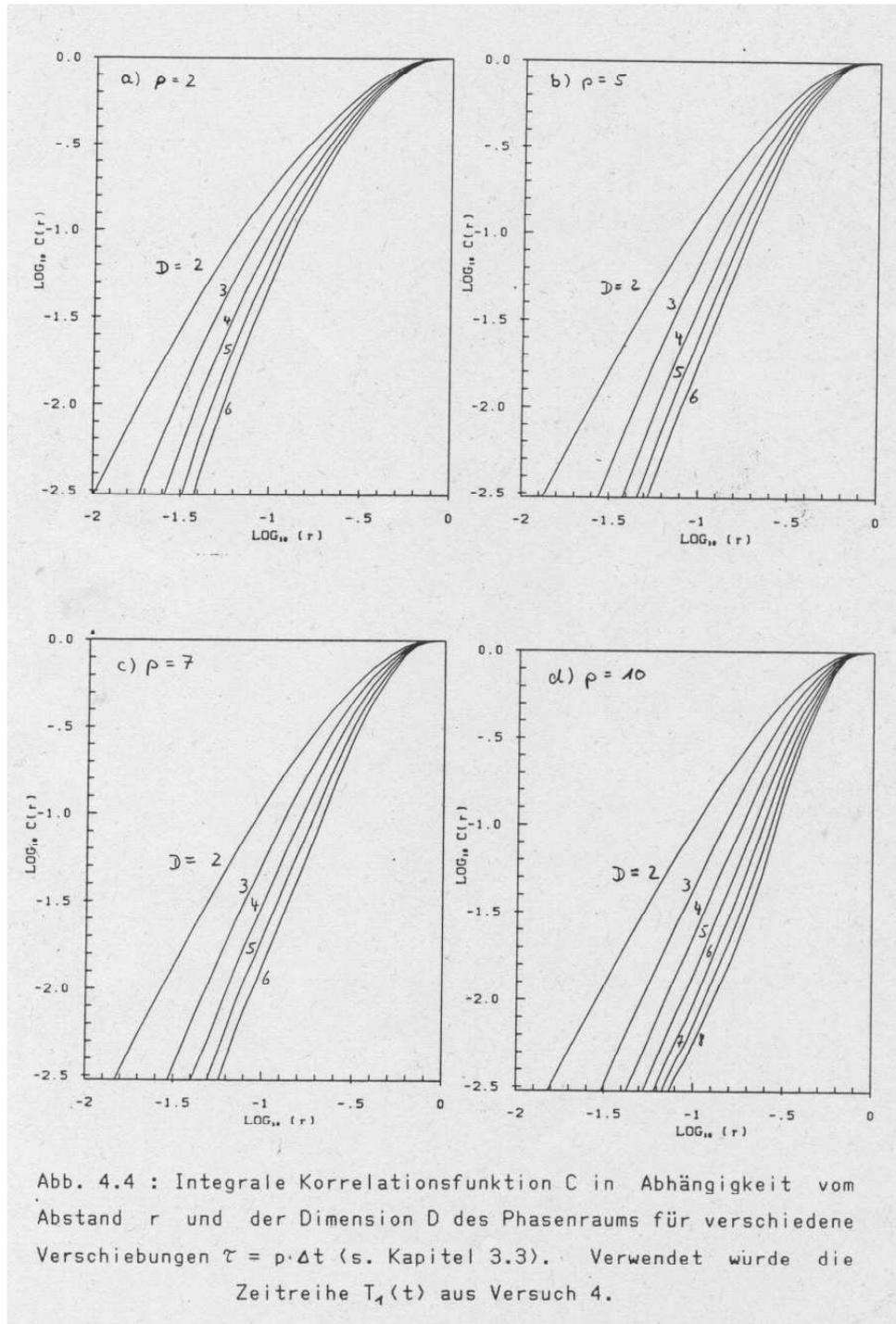


4.2.3 Anwendung des Verfahrens von Malraison et al.

Malraison et al. (1983) wendeten das im letzten Kapitel vorgestellte Verfahren auf Zeitreihen an, die aus ca. 10000 Punkten bestanden. Da die in unserem Versuch ermittelten Zeitreihen nur aus ca. 1100 (bzw. 2256 bei Versuch 5) bestehen, musste das Verfahren fuer solch kurze Reihen zunaechst getestet werden. Abb. 4.3 a und b zeigen das Resultat der Anwendung der erwaehten Methode auf zwei Zeitreihen der Laenge 1100, bestehend aus reinen Sinusschwingungen der Periode 205 bzw. 50. Der Attraktor, der einer solchen Schwingung entspricht, ist ein Grenzzyklus mit der Dimension $d=1$. Entsprechend Gleichung 3.10 ergibt sich die Abhaengigkeit der integralen Korrelationsfunktion C vom Abstand r im Phasenraum zu $\log(C(r)) \sim d \cdot \log(r)$ mit $d = 1.02 \pm .02$.



4 Eigene Experimente



Die Abhängigkeit der Ergebnisse des Verfahrens von der Wahl der Verschiebung $\tau = p \cdot \Delta t$ wurde an den Zeitreihen aus Versuch 4 getestet. Abb. 4.5 zeigt das Ergebnis für $p=2, 5, 7$ und 10 , die zugrunde liegende Reihe war die Aufzeichnung der Temperatur

T_1 im unteren Bereich der Glycerinschicht. Die Ergebnisse fuer die Temperatur T_2 sind qualitativ gleich und werden deshalb nicht weiter diskutiert. Die Kurven in Abb. 4.4 wurden im Bereich kleinerer Abstaende r numerisch durch Geraden angepasst. In Abb. 4.5 sind die Steigungen der Geraden in Abhaengigkeit von der Verschiebung $\tau = p \cdot \nabla t$ und der Dimension D des Phasenraums dargestellt. Die Steigungen selbst liegen fuer verschiedene p relativ dicht beieinander, jedoch sind die mittleren quadratischen Fehler fuer $p = 2$ deutlich groesser als fuer $p = 5, 7$ und 10 . Der Grund fuer diese Abweichung ist in Abb. 4.4 a) zu erkennen. Die Kurven $\log(C(r)) = f(\log(r))$ sind fuer $p = 2$ auch fuer kleine r deutlich staerker rechtsgekrueummt als fuer groessere p . Fuer $p = 10$ und hohe Dimensionen D geht diese Rechtskrueumung in eine Lichtkrueumung bei mittleren Abstaenden r ueber und vermindert so die Steigungen fuer kleine bis mittlere r .

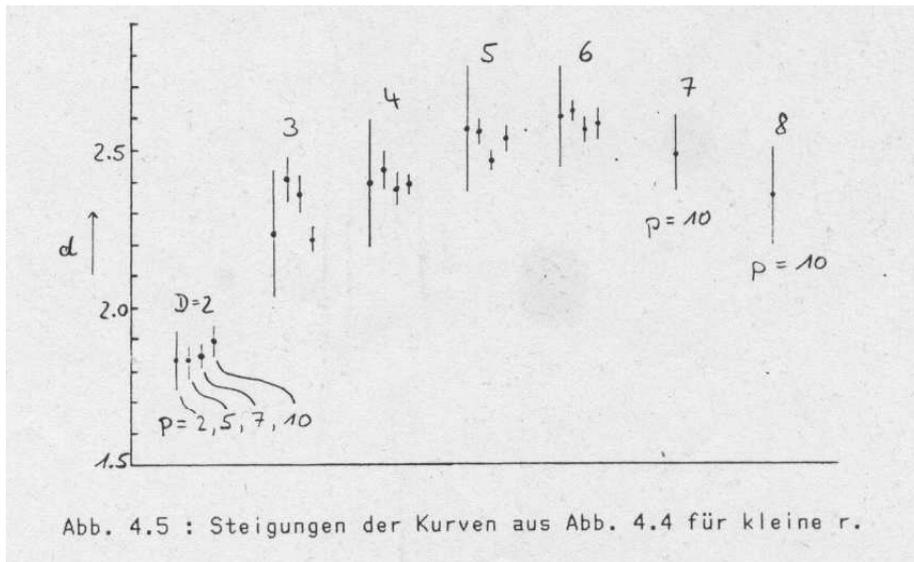


Abb. 4.5 : Steigungen der Kurven aus Abb. 4.4 fuer kleine r .

Dieses Verhalten wurde auch von Malraison et al. (1983) bei einigen Zeitreihen gefunden, seine Ursache konnte auch in unseren Versuchen nicht geklaert werden. Moeglicherweise liegt sie darin, dass die registrierten Zeitreihen doch zu kurz sind, um die gesamte Struktur des zugrunde liegenden Attraktors zu erfassen. Unter diesen Umstaenden kann das Ergebnis der Rekonstruktion des Attraktors von der Wahl der unabhagengigen Variablen abhageng.

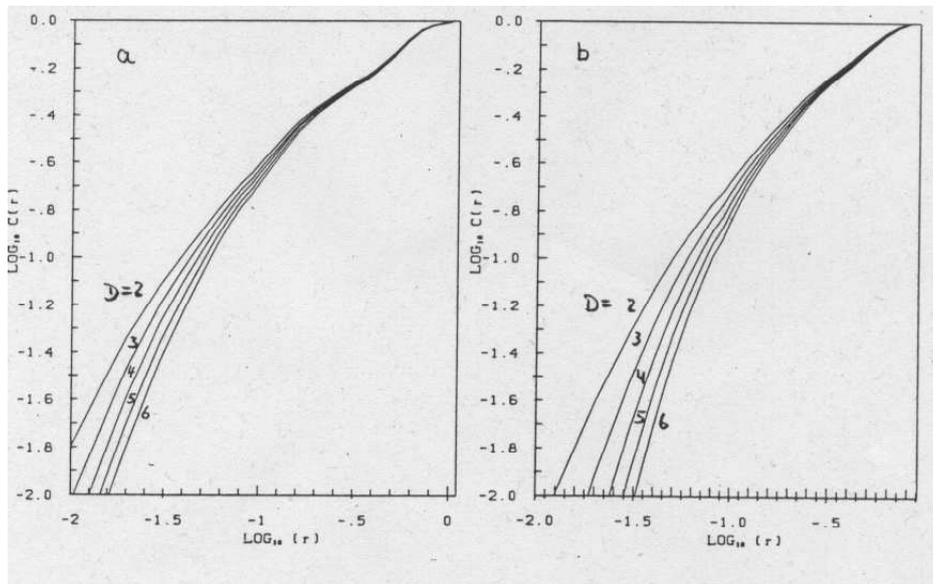
Da die Steigungen in Abb. 4.5 jedoch relativ gut uebereinstimmen, scheint diese Abhagengigkeit nicht kritisch zu sein. Das aeussert sich auch darin, dass die Steigungen d fuer alle gewaehlten Verschiebungen nicht proportional zur Dimension D des Phasenraumes anwachsen, die Kurven $d = f(D)$ flachen fuer wachsendes D deutlich ab. Zur Auswertung der Zeitreihen aus den anderen Versuchen wurde die Verschiebung $\tau = 5 \cdot \Delta t$ gewaehlt.

Die Ergebnisse des Verfahrens mit der Verschiebung $\tau = 5 \cdot \Delta t$ fuer alle registrierten Zeitreihen sind den Abbildungen 4.6 bis 4.10 zu entnehmen. Die Kurven fuer die Versuche 2 bis 5 zeigen fuer kleine und mittlere r einen linearen Verlauf, die schon erwahnte schwache Rechtskrueumung nimmt mit wachsender Rayleighzahl ab.

4 Eigene Experimente

Die Abhaengigkeit der Steigung d von der Dimension D des Phasenraums ist fuer die Zeitreihen $T_1(t)$ in Abb. 4.11 dargestellt. Das Abflachen der Kurven fuer wachsendes D deutet auf die Existenz seltsamer Attraktoren mit den Dimensionen 2.2, 2.4, 2.6 und 3.9 hin. Die staerkeren kurzperiodischen Schwankungen der Temperatur T_2 aeussern sich nicht nur in einer Erhoehung der Dimension der Attraktoren, sondern auch darin, dass die Kurven $d = f(D)$ fuer wachsendes D schwaecher abflachen (Abb. 4.12). Das macht sich bei kleineren Rayleighzahlen (Versuche 2-4) staerker bemerkbar. Da der Verlauf der Temperatur T_2 in allen Versuchen staeker von aeusseren Einfluessen bestimmt war, stimmen die aus den Zeitreihen $T_1(t)$ gewonnenen Werte fuer d sicher besser mit den Dimensionen der Attraktoren ueberein. Wegen des starken Einflusses der Raumtemperatur auf den gemessenen Temperaturverlauf in Versuch 5 ist die Dimension des Attraktors mit $d = 3.9$ moeglicherweise zu hoch angegeben.

In Versuch 1 wird der Temperaturverlauf, wie erwaeht, staeker als in den anderen Versuchen durch langperiodische Variationen gepraegt. Sollten sich diese Schwankungen durch die 'Bewegung' des Systems auf einem seltsamen Attraktor beschreiben lassen, so sind die registrierten Zeitreihen mit Sicherheit zu kurz, um dessen Struktur wiedergeben zu koennen. Ob der Verlauf der Kurven in Abb. 4.6 auf diese Weise zu erklaren ist, oder ob er Ausdruck eines bisher unbekanntes Strukturtyps ist, kann hier nicht entschieden werden.



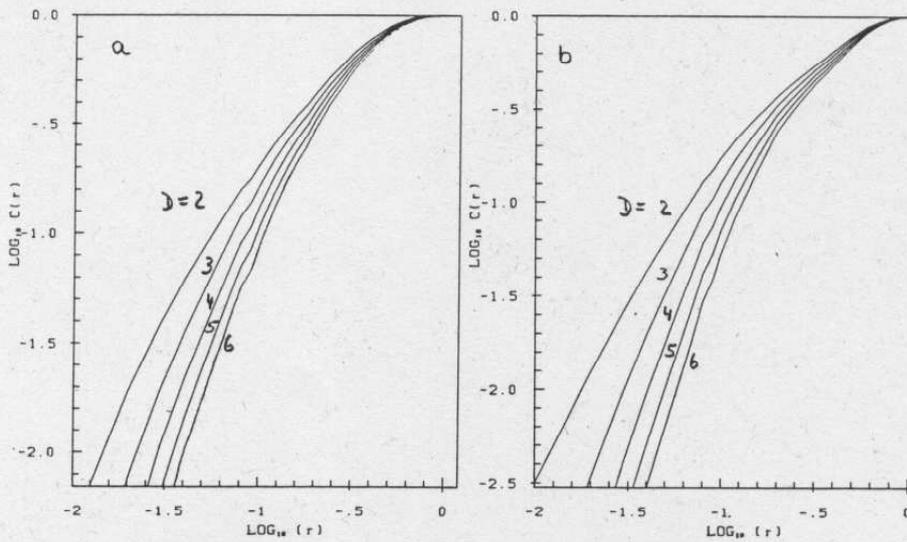


Abb. 4.7 : Integrale Autokorrelationsfunktion der Zeitreihen $T_1(t)$ (a) und $T_2(t)$ (b) aus Versuch 2, $\tau = 5 \cdot \Delta t$.

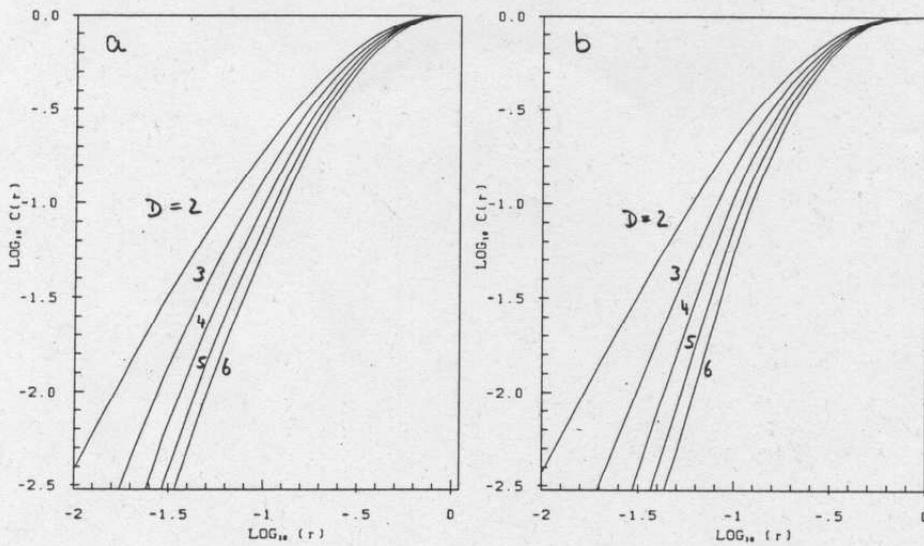


Abb. 4.8 : Integrale Autokorrelationsfunktion der Zeitreihen $T_1(t)$ (a) und $T_2(t)$ (b) aus Versuch 3, $\tau = 5 \cdot \Delta t$.

4 Eigene Experimente

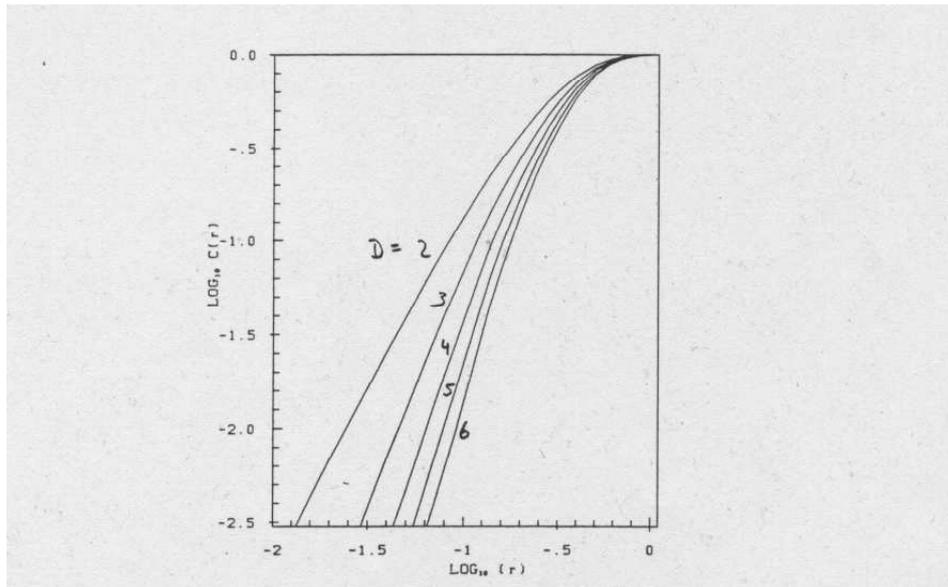


Abb. 4.9 : Integrale Autokorrelationsfunktion der Zeitreihe $T_2(t)$ aus Versuch 4, $\tau = 5 \cdot \Delta t$. Das Ergebnis für T_1 ist Abb. 4.4 b zu entnehmen.

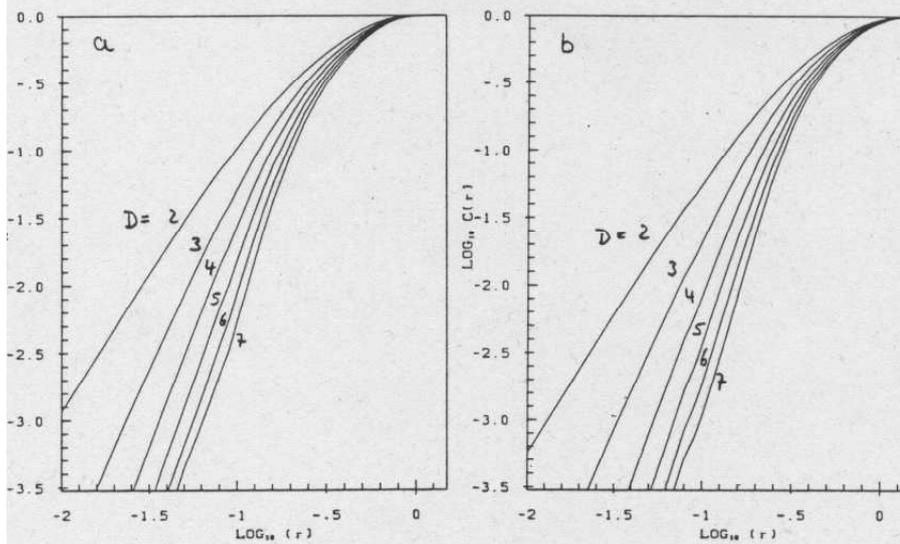


Abb. 4.10 : Integrale Autokorrelationsfunktion der Zeitreihen $T_1(t)$ (a) und $T_2(t)$ (b) aus Versuch 5, $\tau = 5 \cdot \Delta t$.

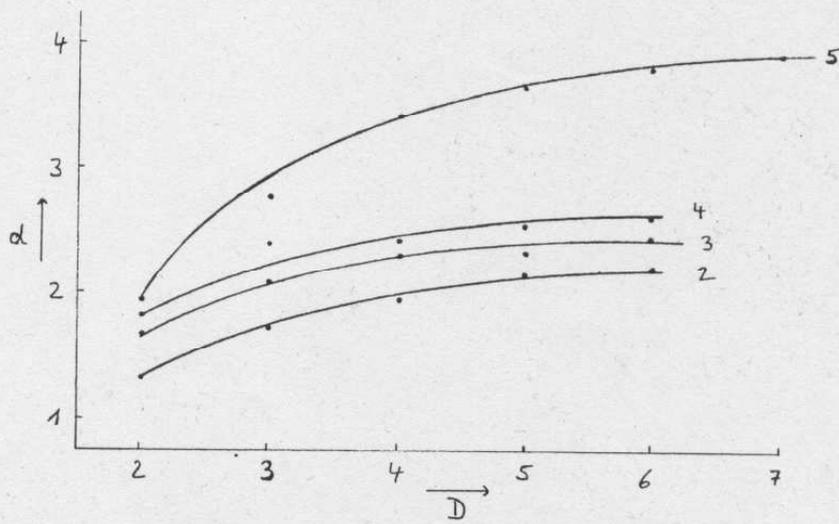


Abb. 4.11 : Steigungen der Kurven aus den Abbildungen 4.7 - 4.10 für die Zeitreihen $T_1(t)$ aus den Versuchen 2 - 5 in Abhängigkeit von der Dimension D des Phasenraums.

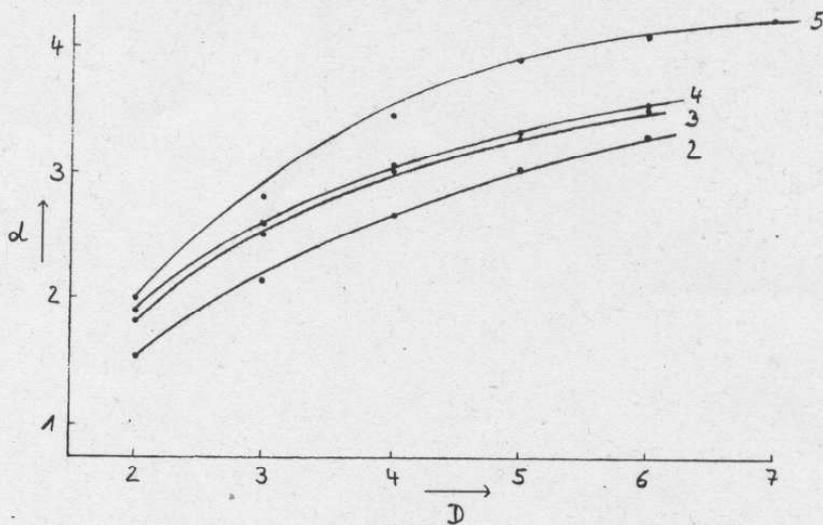


Abb. 4.12 : Steigungen der Kurven aus den Abbildungen 4.7 - 4.10 für die Zeitreihen $T_2(t)$ aus den Versuchen 2 - 5 in Abhängigkeit von der Dimension D des Phasenraums.

4 *Eigene Experimente*

5 Geophysikalische Betrachtungen

Das wichtigste Ergebnis unserer Versuchsreihe ist wohl die Bestätigung der Theorie der nichtlinearen Dynamik darin, dass das Auftreten von Turbulenz mit der Existenz seltsamer Attraktoren zusammenhängt. In allen nichtlinearen dissipativen Systemen, wozu in hydrodynamischen Sinn auch der Erdmantel gehört, ist also bei ausreichend hoher Energiezufuhr mit nichtstationärem bzw. chaotischem Verhalten zu rechnen. Die Rayleighzahl des Erdmantels wird auf 10^5 bis 10^7 geschätzt (McKenzie et al., 1974, Jarvis und Peltier, 1982), ein Wert, der auf zeitabhängige Strömungsformen schließen lässt.

Diese Vermutung konnte in verschiedenen numerischen Modellen mit unendlicher Prandtlzahl (Jarvis, 1984, Hansen, 1985) bestätigt werden. Der starke Viskositätsgradient in der D'' -Schicht, die die untere Grenze des Mantels zum Erdkern bildet, kann nach Christensen (1984) zu Instabilitäten führen, die den in Versuch 5 beobachteten ähnlich sind. Diese Instabilitäten, die sich in der Bildung von 'Plumes' und im Abloesen von 'Blobs' äußern, konnten Nataf et al. (1984) in Experimenten mit kleinem Querverhältnis und einer Prandtlzahl von 10^6 bei einer Rayleighzahl von $6 \cdot 10^5$ beobachten. Diese charakteristischen Strömungsformen konnten also schon bei verschiedenen Prandtlzahlen beobachtet werden und treten deshalb wahrscheinlich auch im Erdmantel auf.

Die charakteristischen Zeiten, in denen solche Prozesse wie die Bildung, das Abloesen und der Aufstieg eines heißen 'Blobs' ablaufen, sind jedoch abhängig von Rayleigh- und Prandtlzahl. Die Extrapolation von Zeitskalen aus Laborversuchen und numerischen Modellen auf Erdmantelbedingungen erscheint aus zwei Gründen fragwürdig. Erstens existieren noch zu wenige Ergebnisse, aus denen man extrapolieren könnte, zweitens zeigen die theoretischen und experimentellen Ergebnisse, dass sich die Eigenschaften nichtlinearer Systeme durch Bifurkationen sprunghaft ändern können. Dass dennoch an vielen Stellen Laborversuche, wie in der vorliegenden Arbeit beschrieben, gemacht werden, erfolgt aus der Notwendigkeit heraus, den allgemeinen Kenntnisstand über nichtlineare hydrodynamische Systeme auch im Hinblick auf die Physik des Erdmantels systematisch zu erweitern. Das betrifft, im Hinblick auf die Entwicklungsgeschichte der Erde, auch die Zeitabhängigkeit von Konvektionsströmungen, die im 4. Kapitel u.a. mit Hilfe von Spektren analysiert wurde.

Es sind deutliche Hinweise auf die zeitliche Abhängigkeit der Mantelkonvektion vorhanden. Dies zeigen z. B. Turcotte und Schubert (1982) anhand einiger geophysikalischer Phänomene. So wird die Bildung von kontinentalen Riftsystemen (ostafrikanischer Graben, Rheingraben) allgemein auf die spontane Entstehung von heißen 'Plumes' im Erdmantel zurückgeführt. Diese 'Plumes' haben (in Analogie zu den in Versuch 5 beob-

5 Geophysikalische Betrachtungen

achteten) offenbar nicht alle die gleiche Lebensdauer : Manche bleiben so lange stabil, bis der Kontinent sich aufspaltet, andere existieren nur ueber kuerzere Zeitraeume, so dass der Kontinent erhalten bleibt. Die Existenz von Gebieten mit deutlich erhoehetem Waermefluss innerhalb von Lithosphaerenplatten, sogenannte 'Hot Spots', koennen mit der Existenz von wesentlich enger begrenzten 'Plumes' in Verbindung gebracht werden. Weitere Phaenomene, die auf instationaere Stroemungen im Erdmantel hinweisen, sind Veraenderungen der Driftgeschwindigkeiten ozeanischer Platten, das 'Ueberdriften' von Subduktionszonen sowie die Subduktion ozeanischer Ruecken.

Systeme, deren Verhalten sich durch die 'Bewegung' auf einem seltsamen Attraktor mit niedriger Dimension beschreiben laesst, unterscheiden sich wesentlich von Systemen mit einer hohen Anzahl von Freiheitsgraden. Der Abstand zweier nah beieinander liegender Punkte im Phasenraum (Zustaende des Systems) waechst bei der Bewegung auf einem seltsamen Attraktor exponentiell mit der Zeit. Die Rate dieses Wachstums wird von den Liapunov-Exponenten des Attraktors bestimmt. Gelingt es, diese Exponenten zu ermitteln, kann man die Genauigkeit von Voraussagen ueber die Entwicklung des Systems angeben. Sie haengt ausser von den Liapunov-Exponenten noch von der Genauigkeit ab, mit der man den Anfangszustand des Systems kennt. Hierzu beispielhaft folgendes : Die Kenntnis der Attraktoren der Troposphaere waere wertvoll fuer die Meteorologie : Ueber sie liesse sich der Aufwand fuer eine Verbesserung und Verlaengerung der Wettervorhersage bestimmen. Die Troposphaere ist zwar kein abgeschlossenes System und die Kenntnis ihrer Attraktoren liegt, falls diese ueberhaupt jemals klassifiziert werden koennen, in weiter Ferne. Die theoretischen Ansaetze sind jedoch so vielversprechend, dass die Untersuchung geophysikalischer Systeme wie das der Troposphaere und - im Hinblick auf das Thema dieser Arbeit - das des konvektiven Erdmantels mit den schon bekannten oder noch zu entwickelnden Methoden aus der nichtlinearen Dynamik neue und tiefe Einsichten verspricht, die mit den bisher benutzten konventionellen Methoden nicht zu erhalten sind.

Danksagung

Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr. A. Ebel fuer die Bereitstellung des Themas und das rege Interesse an meiner Arbeit. Fuer die Unterstuetzung bei der Loesung praktischer Probleme danke ich den Herren Bastians, Dipl. Geophys. Kaeselau, Dipl. Geophys. Kuth und Herrn Nicolin. Bei Herrn Dipl. Geophys. Hansen bedanke ich mich fuer die vielen anregenden Diskussionen.

Die notwendigen Rechnungen wurden auf den Rechnern CDC Cyber 73/76M des Regionalen Rechenzentrums der Universitaet zu Koeln durchgefuehrt.

5 Geophysikalische Betrachtungen

Literaturverzeichnis

- [1] Ahlers, G., Behringer, R.P. : Evolution of turbulence from the Rayleigh-Benard instability, *Phys. Rev. Lett.*, 40, 712-716, 1978
- [2] Benard, H. : Les tourbillons cellulaires dans une masse liquide transportant de la chaleur par convection en regime permanent, *Ann. Chim. Phys.*, 23, 62-144, 1901
- [3] Berge, P., Dubois, M., Manneville, P., Pomeaux, Y. : Intermittency in Rayleigh-Benard convection, *J. Phys. Lettres*, 41, 341-345, 1980
- [4] Binder, K. : Hydrodynamische Instabilitaet : Mathematische Grundlagen, in : Ferienkurs '83, Nichtlineare Dynamik in kondensierter Materie, KFA Juelich GmbH, 1983
- [5] Bronstein, I., Semendjajew, K. : Taschenbuch der Mathematik, Verlag Harri Deutsch, Zuerich - Frankfurt/Main - Thun, 1977
- [6] Busse, F.H. : The oscillatory instability of convection rolls in a low Prandtl number fluid, *J. Fluid Mech.*, 52, 97-112, 1972
- [7] Busse, F.H. : Transition to turbulence in Rayleigh-Benard convection, *Topics in Applied Physics*, 45, 97-137, 1981
- [8] Busse, F.H., Whitehead, J.A. : Instabilities of convection rolls in a high Prandtl number fluid, *J. Fluid Mech.*, 47, 305-320, 1971
- [9] Busse, F.H., Whitehead, J.A. : Oscillatory and collective instabilities in a large Prandtl number convection, *J. Fluid Mech.*, 66, 67-79, 1974
- [10] Carter, N.L. : Steady state flow of rocks, *Rev. Geophys. Space Phys.*, 14, 301-360, 1976
- [11] Cathless, L.M. : The viscosity of the earth's mantle, Princeton University Press, Princeton, 1975
- [12] Chandrasekhar, S. : Hydrodynamic and hydromagnetic stability, Clarendon Press, Oxford, 1961
- [13] Christensen, U. : Instability of a hot boundary layer and initiation of thermochemical plumes, *Ann. Geophysicae*, 2, 311-320, 1984
- [14] Curry, J.H. : A generalized Lorenz system, *Commun. Math. Phys.*, 60, 193-204, 1978
- [15] D'Ans, Lax : Taschenbuch fuer Chemiker und Physiker, Band I, Springer Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, 1967
- [16] Di Prima, R. C., Swinney, H. L. : Instabilities and transition to turbulence in flow between concentric rotating cylinders, *Topics in Applied Physics*, 45, 139-180, 1981

Literaturverzeichnis

- [17] Eckmann, J.P. : Roads to turbulence in dissipative dynamical systems, *Rev. Mod. Phys.*, 53, 643-654, 1981
- [18] Eilenberger, G., Kehr, K. : Nichtlineares : Neuere Aspekte aus der mathematischen Physik, Vorlesung, Universitaet zu Koeln, Sommersemester 1982
- [19] Feigenbaum, M. J., : Quantitative universality for a class of nonlinear transformations, *J. Stat. Phys.*, 19, 25-52, 1978
- [20] Feigenbaum, M. J., : The universal metric properties of nonlinear transformations, *J. Stat. Phys.*, 21, 669-706, 1979
- [21] Froehling, H., Crutchfield, J. P., Farmer, J. D., Packard, N. H., Shaw, R. S. : On determining the dimension of chaotic flow, *Physica 3D*, 605-617, 1981
- [22] Geisel, T. : Chaos, randomness and dimension, *Nature*, 298, 322-323, 1982
- [23] Giglio, M., Muzzati, S., Perini, U. : Transition to chaotic behaviour via a reproducible sequence of period-doubling bifurcations, *Phys. Rev. Lett.*, 47, 243-246, 1981
- [24] Gollub, J. P., Benson, S. V. : Many routes to turbulent convection, *J. Fluid Mech.*, 100, 449-470, 1980
- [25] Gollub, J. P., Swinney, H. L. : Onset of turbulence in a rotating Fluid, *Phys. Rev. Lett.*, 35, 927-930, 1975
- [26] Graham, R., Turbulenz, in : Ferienkurs '83, Nichtlineare Dynamik in kondensierter Materie, KFA Juelich GmbH, 1983
- [27] Grassberger, P., Procaccia, I. : Characterization of strange attractors, *Phys. Rev. Lett.*, 50, 346-349, 1983
- [28] Guckenheimer, J. : Noise in chaotic systems, *Nature*, 298, 358-361, 1982
- [29] Hansen, U. : Numerische Experimente zur Mantelkonvektion, Diplomarbeit, Institut fuer Geophysik und Meteorologie, Universitaet zu Koeln, 1983
- [30] Hansen, U., Ebel, A. : Numerical and dynamical stability of convection rolls in the Rayleigh number range $10^3 - 8 \cdot 10^5$, *Ann. Geophysicae*, 2, 291-302, 1984
- [31] Huppert, H.E. : Turbulence in earth, sun and sea, *Nature*, 303, 478-479, 1983
- [32] Jarvis, G. T. : Time-dependent convection in the earth's mantle, *Phys. Earth Planet. Inter.*, 36, 305-327, 1984
- [33] Jarvis, G. T., Peltier, W. R. : Mantle convection as a boundary layer phenomenon, *Geophys. J. R. astr. Soc.*, 68, 389-429, 1982
- [34] Jenkins, G.M., Watts, D.G. : Spectral analysis and its applications, Holden-Day, San Francisco-Cambridge-London-Amsterdam, 1968
- [35] Joseph, D. D. : Hydrodynamic stability and bifurcation, *Topics in Applied Physics*, 45, 27-76, 1981
- [36] Kaplan, J.L., Yorke, J.A. : A regime observed in a fluid flow model of Lorenz, *Commun. Math. Phys.*, 67, 93-108, 1979

- [37] Kehr, K. : Intermittenz, in : Ferienkurs '83, Nichtlineare Dynamik in kondensierter Materie, KFA Juelich GmbH, 1983
- [38] Kohlstedt, D.L., Goetze, C. : Low-stress high-temperature creep in olivine single crystals, *J. Geophys. Res.*, 79, 2045-2051, 1974
- [39] Kroll, D. : Grundlagen nichtlinearer Analyse : Differential- und Differenzgleichungen, in : Ferienkurs '83, Nichtlineare Dynamik in kondensierter Materie, KFA Juelich GmbH, 1983
- [40] Kuth, Ch. : Experimente zur thermisch getriebenen Konvektion in einer hochviskosen Fluessigkeit, Diplomarbeit, Institut fuer Geophysik und Meteorologie, Universitaet zu Koeln, 1983
- [41] Landau, L.E., Lifschitz, E.M. : Lehrbuch der theoretischen Physik, Band VI, Akademie Verlag, Berlin, 1981
- [42] Lanford, O.E. : Strange attractors and turbulence, *Topics in Applied Physics*, 45, 7-26, 1981
- [43] Lorenz, E.N., Deterministic nonperiodic flow, *J. Atmos. Sci.*, 20, 130-141, 1963
- [44] Malraison, B., Atten, P., Berge, P., Dubois, M. : Dimension of strange attractors : an experimental determination for the chaotic regime of two convective systems, *J. Phys. Lettres*, 44, 897-902, 1983
- [45] Mandelbrot, B.B. : *Fractals : Form, chance and dimension*, Freeman, San Francisco, 1977
- [46] Manneville, P. : Towards an understanding of weak turbulence close to the convection threshold in large aspect ratio systems, *J. Phys. Lettres*, 44, 903-916, 1983
- [47] Manneville, P. Pomeau, Y. : Different ways to turbulence in dissipative dynamical systems, *Physica 1D*, 219-226, 1980
- [48] Maurer, J., Libchaber, A. : Rayleigh-Benard experiment in liquid helium : frequency locking and the onset of turbulence, *J. Phys. Lettres*, 40, L 419-423, 1979
- [49] Maurer, J., Libchaber, A. : Effect of the Prandtl number on the onset of turbulence in liquid ^4He , *J. Phys. Lettres*, 41, 515-518, 1980
- [50] Mayer, D. H. : Turbulenz : Durchbruch in einem lange ungelosten Problem ? (Teil 1), *Phys. Bl.*, 38, 55-59, 1982
- [51] Mayer, D. H. : Turbulenz : Durchbruch in einem lange ungelosten Problem ? (Teil 2), *Phys. Bl.*, 38, 87-92, 1982
- [52] McKenzie, D.P., Roberts, J.M., Weiss, N.O. : Convection in the Earth's mantle : towards a numerical simulation, *J. Fluid Mech.*, 62, 465-538, 1974
- [53] McLaughlin, J.B., Martin, P.C. : Transition to turbulence in a statically stressed fluid system, *Phys. Rev.*, A12, 186-203, 1975
- [54] Mori, H. : Fractal dimensions of chaotic flows of autonomous dissipative systems, *Prog. Theor. Phys.*, 63, 1044-1047, 1980

- [55] Nataf, H.-C., Hager, B.H., Scott, R.F. : Convection experiments in a centrifuge and the generation of plumes in a very viscous fluid, *Ann. Geophysicae*, 2, 303-310, 1984
- [56] Nicolis, C., Nicolis G. : Is there a climatic attractor ?, *Nature*, 311, 529-532, 1984
- [57] Normand, Ch., Pomeau, Y., Velarde, M. G., Convective instability : A physicist's approach, *Rev. Mod. Phys.*, 49, 581-624, 1977
- [58] Packard, N. H., Crutchfield, J. P., Farmer, J. D., Shaw, R. S. : Geometry from a time series, *Phys. Rev. Lett.*, 45, 712-716, 1980
- [59] Peixoto, M. M. : Structural stability on two-dimensional manifolds, *Topology*, 1, 101-120, 1962
- [60] Peltier, W.R., Andrews, J.T. : Glacial-isostatic adjustment I, the forward problem, *Geophys. J. R. astr. Soc.*, 46, 605-646, 1976
- [61] Peltier, W.R., Wu, P. : Mantle phase transitions and the free air gravity anomalies over Fennoscandia and Laurentia, *Geophys. Res. Lett.*, 9, 731-734, 1982
- [62] Pobell, F. : Das Verhalten von Fluessigkeiten als Beispiel fuer getriebene nichtlineare Systeme auf dem Weg zum Chaos, in : Ferienkurs '83, Nichtlineare Dynamik in kondensierter Materie, KFA Juelich GmbH, 1983
- [63] Rayleigh, Lord : On convection currents in a horizontal layer of fluid when the higher temperature is on the under side, *Phil. Mag.*, 32, 529-546, 1916
- [64] Roberts, P. H. : Convection in horizontal layers with internal heat generation : Theory, *J. Fluid Mech.*, 30, 33-49, 1967
- [65] Roepstorff, G. : Universalitaet in dissipativen Systemen : Die logistische Gleichung, in : Ferienkurs '83, Nichtlineare Dynamik in kondensierter Materie, KFA Juelich GmbH, 1983
- [66] Ruelle, D., Takens, F. : On the nature of turbulence, *Commun. Math. Phys.*, 20, 167-192, 1971
- [67] Saito, Y. : Dissipative kontinuierliche Systeme : a) Fremdartige Attraktoren b) Periodenverdopplung, in : Ferienkurs '83, Nichtlineare Dynamik in kondensierter Materie, KFA Juelich GmbH, 1983
- [68] Saltzman, B. : Finite amplitude free convection as an initial value problem I., *J. Atmos. Sci.*, 19, 329-341, 1962
- [69] Schlueter, A., Lortz, D., Busse, F. : On the stability of steady finite amplitude convection, *J. Fluid Mech.*, 23, 129-144, 1965
- [70] Stewart, I. : Novel techniques in bifurcation theory, *Nature*, 305, 98, 1983
- [71] Thomae, S. : Symbolische Dynamik, in : Ferienkurs '83, Nichtlineare Dynamik in kondensierter Materie, KFA Juelich GmbH, 1983
- [72] Turcotte, D. L., Schubert, G. : *Geodynamics*, John Wiley and Sons, New York, 1982
- [73] Weertmann, J. Weertmann, J.R. : High temperature creep of rock and mantle viscosity, *Ann. Rev. Earth Planet. Sci.*, 3, 293-316, 1975

- [74] Wittig, J. : Experimentelles zur Rayleigh-Benard-Konvektion, in : Ferienkurs '83, Nichtlineare Dynamik in kondensierter Materie, KFA Juelich GmbH, 1983
- [75] Yorke, J.A., Yorke, E.D. : Chaotic behaviour and fluid dynamics, Topics in Applied Physics, 45, 77-96, 1981

Literaturverzeichnis

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbst verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.

Koeln, den 23. 2. 1985