Lineaire Algebra en Vector Analyse (GEO2-1201)

5 november 2009, 13.00-16.00

DEEL 1

Toon ook de tussenstappen.

1. Los (indien mogelijk) de volgende twee stelsels van vergelijken op:

   (a)
$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & y & - & 2z & = & 3 \\ 2x & + & y & + & z & = & 2 \end{array}$$

   (b)
$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 4 \\ 2x & & & - & z & = & 1 \\ x & - & 2y & & & = & -3 \end{array}$$

   (c) Veronderstel dat de vergelijkingen vlakken representeren.
   Indien de oplossing bestaat, representeert deze dan een punt, een lijn, of een vlak? Geef het antwoord voor zowel (a) als (b).

2. Gegeven zijn de vectoren $\mathbf{p} = 1\mathbf{i} + a\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$ en $\mathbf{q} = 0\mathbf{i} + 1\mathbf{j} + 1\mathbf{k}$.
   Bereken de waarde(n) van a zodat de vectoren $\mathbf{p}$ en $\mathbf{q}$ een hoek van $\frac{\pi}{3}$ maken.

3. (a) Bepaal de vergelijking van het vlak door de punten $A = (0, 1, 1)$, $B = (2, 1, 3)$, en $C = (4, 2, 1)$.
   (b) Geef de vergelijking van de lijn die door het punt $P = (2, 1, -1)$ gaat en loodrecht op het vlak van (a) staat.
   (c) Bereken de afstand van punt $P = (2, 1, -1)$ tot het vlak $2x+2y-z = 10$.

4. Gegeven is de matrix A:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$
   (a) Bereken de inverse van A.
   Voor welke waarde(n) van k is de matrix A singulier (niet inverteerbaar)?
   (b) Gebruik A^{-1} om (x, y, z) op te lossen voor het stelsel vergelijkingen:
$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & ky & + & z & = & 1 \\ & & y & + & 2z & = & 0 \\ x & + & y & + & 3z & = & 1 \end{array}$$

5. A is een symmetrische $(n \times n)$ matrix. B is een $(n \times m)$ matrix.
   Schrijf de uitdrukking
$$(B^T AB)^T$$
   als een vermenigvuldiging van matrices A, B, en B^T in een zekere volgorde.
   Gebruik indexnotatie.

DEEL 2

Toon ook de tussenstappen.

1. De matrix M is gegeven als

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Bereken de eigenwaarden en eigenvectoren van M.

(b) Geef een diagonaalmatrix van eigenwaarden, D, en de bijbehorende matrix van eigenvectoren, C.
Wat is de relatie tussen M, C en D?
Wat is de betekenis van D en C?

2. (a) Een punt is gegeven in het Cartesisch coördinatenstelsel (x, y, z) als $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, -2)$. Geef de coördinaten van het punt in het cilindrisch coördinatenstelsel (r, θ, z) en het sferisch coördinatenstelsel (r, θ, ϕ).
Geef ook een schets waarin de hoeken van het sferisch coördinatenstelsel aangegeven zijn.

(b) Bereken(!) de oppervlakte van een cirkel met straal a.

3. Bereken het volume tussen de vlakken $z = 2x^2 + y^2 + 12$ en $z = x^2 + y^2 + 8$ en boven de driehoek in het (x, y)-vlak met hoekpunten $(0, 0)$, $(1, 0)$, en $(1, 2)$.

4. (a) Bereken $\nabla\phi$ en $\nabla^2\phi$ met $\phi = z^2 - 3xy$.
Bereken tevens de richtingsafgeleide (directional derivative) van ϕ in het punt $(1, 0, 0)$ in de richting $\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$.

(b) Bereken $\nabla \cdot \mathbf{V}$ en $\nabla \times \mathbf{V}$ met $\mathbf{V} = x^2y\mathbf{i} + xy^2\mathbf{j} + xyz\mathbf{k}$.
Is $\mathbf{V}$ conservatief? Verklaar.

5. (a) Geef de stelling van Gauss (het divergentie theorema) en de stelling van Stokes.

(b) Bereken $\int\int \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma$ over het oppervlak van een kubus met vier van de hoekpunten op $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, en $(0, 0, 1)$ waarbij
$\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$.