Lineaire Algebra en Vector Analyse

13. Stelling van Gauss en Stokes

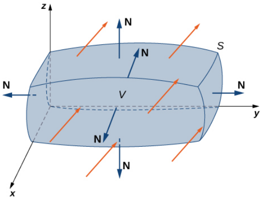
Hanneke Paulssen

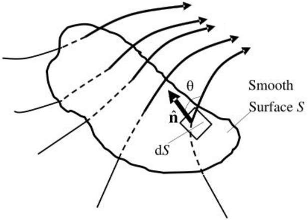
Universiteit Utrecht

Samenvatting

- Oppervlakte-integraal vectorveld
- Stelling van Gauss / divergentie theorema
- Circulatie
- Stelling van Stokes

Oppervlakte-integraal vectorveld





Oppervlakte-element van lichaam met volume V en oppervlak S:

- grootte dS
- oriëntatie $\hat{n}$ (naar buiten gerichte normaal op dS)

Netto naar buiten gerichte flux van vectorveld $\vec{v}$ over oppervlak S:

$$\iint\limits_S \vec{v} \cdot \hat{n}\, dS$$

Boek: volume τ (i.p.v. V), en oppervlakte σ (i.p.v. S)
Flux van $\vec{v}$ over oppervlak σ: $\iint\limits_\sigma \vec{v} \cdot \hat{n}\, d\sigma$

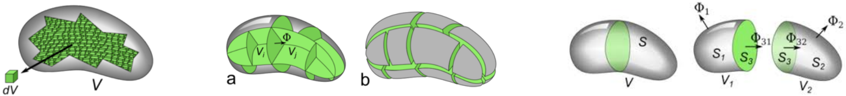
Notatie soms: $\hat{n}\, d\sigma = d\vec{\sigma}$. Dan: $\iint\limits_\sigma \vec{v} \cdot d\vec{\sigma}$

Stelling van Gauss (divergentie theorema)

Netto naar buiten gerichte flux per volume-element:

$$\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) dxdydz = \nabla \cdot \vec{v}\, dxdydz = \nabla \cdot \vec{v}\, dV$$

Totale flux volume V omsloten door S: $\iiint\limits_V \nabla \cdot \vec{v}\, dV$



Fluxen door interne zijde van twee naast elkaar deelvolumes zijn even groot maar tegengesteld. $\Rightarrow$

Alleen netto bijdrage aan flux door buitenoppervlak S.

Stelling van Gauss (divergentie theorema)

Totale flux volume V omsloten door S: $\iiint\limits_V \nabla \cdot \vec{v}\, dV$

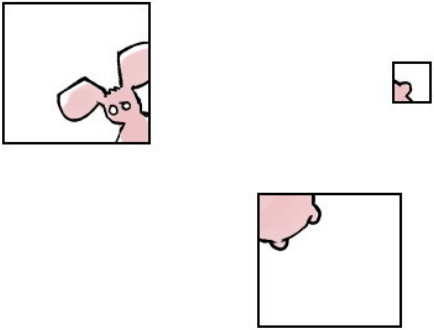
Alleen netto bijdrage aan flux door buitenoppervlak S.

Naar buiten gerichte flux van vectorveld $\vec{v}$ over volume V is flux door oppervlak S:

$$\boxed{\iiint_V \nabla \cdot \vec{v}\, dV = \iint_S \vec{v} \cdot \hat{n}\, dS}$$

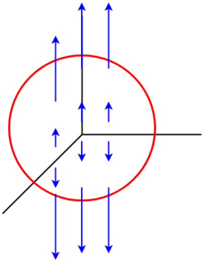
Stelling van Gauss / divergentie theorema

Boek: volume τ en oppervlakte σ: $\boxed{\iiint_\tau \nabla \cdot \vec{v}\, d\tau = \iint_\sigma \vec{v} \cdot \hat{n}\, d\sigma}$



Whatever had happened, it was decidedly uncomfortable.

Stelling van Gauss, voorbeeld



Voorbeeld

σ is oppervlak bol met straal a:
$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$

τ is volume bol

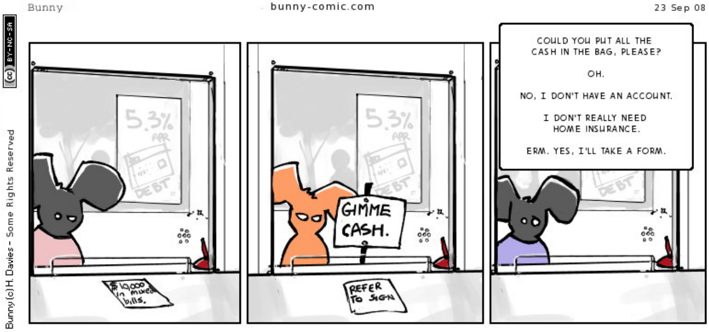
$\vec{v}(x, y, z) = z\,\hat{\mathrm{k}}$

Gevraagd: flux Φ van $\vec{v}$ door σ

$$\Phi = \iint_\sigma \vec{v} \cdot \hat{n}\, d\sigma = \iiint_\tau \nabla \cdot \vec{v}\, d\tau$$

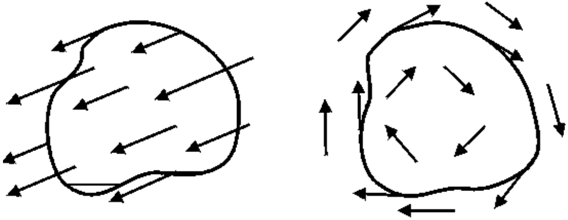
$$\nabla \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = \frac{\partial z}{\partial z} = 1$$

$$\Phi = \iiint_\tau 1\, d\tau = \cdots = \tfrac{4}{3}\pi a^3$$ (Zie 5.4 opgave 4d)


Bunny
bunny-comic.com
23 Sep 08
Bunny (c) H. Davies - Some Rights Reserved
BY-NC-SA
5.3% APR
DEBT
$10,000 in mixed bills.
GIMME CASH.
REFER TO SIGN
COULD YOU PUT ALL THE CASH IN THE BAG, PLEASE?
OH.
NO, I DON'T HAVE AN ACCOUNT.
I DON'T REALLY NEED HOME INSURANCE.
ERM. YES, I'LL TAKE A FORM.

Circulatie

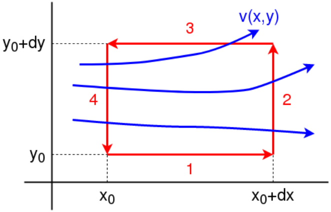
Circulatie: $\oint \vec{v} \cdot d\vec{r}$



Rechts: circulatie $\neq 0$.
Positief voor pad rechtsom, negatief voor pad linksom.

Links: circulatie $= 0$.

Stelling van Stokes, achtergrond: circulatie $\vec{v}$ om $d\sigma$



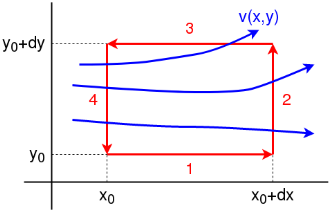
Circulatie linksom langs oppervlakte-element $d\sigma$:

$$\oint \vec{v} \cdot d\vec{r} = \oint \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \oint (v_x dx + v_y dy) =$$

$$\underbrace{\int_{x_0}^{x_0+dx} v_x(x, y_0) dx}_{1} + \underbrace{\int_{y_0}^{y_0+dy} v_y(x_0 + dx, y) dy}_{2} +$$

$$\underbrace{\int_{x_0+dx}^{x_0} v_x(x, y_0 + dy) dx}_{3} + \underbrace{\int_{y_0+dy}^{y_0} v_y(x_0, y) dy}_{4}$$

Stelling van Stokes, achtergrond: circulatie $\vec{v}$ om $d\sigma$



Circulatie linksom langs oppervlakte-element $d\sigma$:

$$\oint \vec{v} \cdot d\vec{r} = \oint \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \oint (v_x dx + v_y dy) =$$

$$\int_{x_0}^{x_0+dx} v_x(x, y_0) dx + \int_{y_0}^{y_0+dy} v_y(x_0 + dx, y) dy -$$

$$\int_{x_0}^{x_0+dx} v_x(x, y_0 + dy) dx - \int_{y_0}^{y_0+dy} v_y(x_0, y) dy$$

Stelling van Stokes, achtergrond: circulatie $\vec{v}$ om $d\sigma$

$$\oint \vec{v} \cdot d\vec{r} = \int_{x_0}^{x_0+dx} v_x(x, y_0) dx + \int_{y_0}^{y_0+dy} v_y(x_0 + dx, y) dy - \int_{x_0}^{x_0+dx} v_x(x, y_0 + dy) dx - \int_{y_0}^{y_0+dy} v_y(x_0, y) dy$$

Gebruik $\int_{x_0}^{x_0+dx} f(x) dx \approx f(x_0) dx$

$$\oint \vec{v} \cdot d\vec{r} \approx v_x(x_0, y_0) dx + v_y(x_0 + dx, y_0) dy - v_x(x_0, y_0 + dy) dx - v_y(x_0, y_0) dy$$

Gebruik $f(x_0 + dx) \approx f(x_0) + \frac{df}{dx} dx$

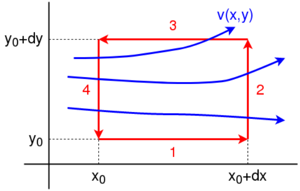
$$\oint \vec{v} \cdot d\vec{r} \approx v_x(x_0, y_0) dx + [v_y(x_0, y_0) + \frac{\partial v_y}{\partial x} dx] dy - [v_x(x_0, y_0) + \frac{\partial v_x}{\partial y} dy] dx - v_y(x_0, y_0) dy$$

$$\oint \vec{v} \cdot d\vec{r} = \left[\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right] dx dy$$

Stelling van Stokes, achtergrond: circulatie $\vec{v}$ om $d\sigma$

Circulatie rondom rechthoekig oppervlak $d\sigma$:

$$\oint \vec{v} \cdot d\vec{r} = \left[\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right] dxdy$$



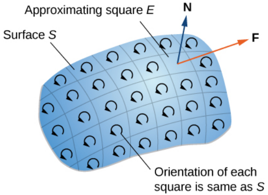
Tevens $\quad \nabla \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$

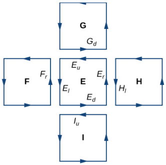
met $(\nabla \times \vec{v}) \cdot \hat{k} = \dfrac{\partial v_y}{\partial x} - \dfrac{\partial v_x}{\partial y}$ en $\hat{k}$ normaal op $d\sigma$ ($=dxdy$)

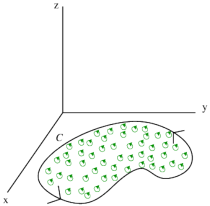
$$\oint_{omtrek\ d\sigma} \vec{v} \cdot d\vec{r} = \iint_{d\sigma} (\nabla \times \vec{v}) \cdot \hat{k}\, dxdy = \iint_{d\sigma} (\nabla \times \vec{v}) \cdot \hat{n}\, d\sigma$$

met $\hat{n}$ normaal op $d\sigma$
volgens rechterhandregel langs integratiepad

Stelling van Stokes







Generalisatie naar groot oppervlak σ: tel bijdragen van oppervakte-elementen op.

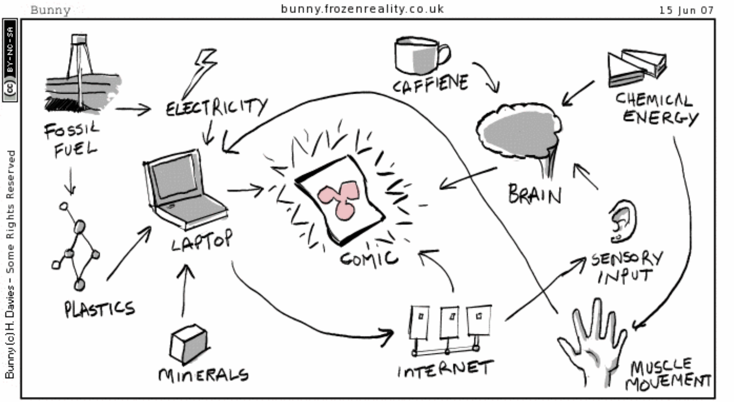
Padintegralen langs interne zijden van twee naastliggende oppervlakte-elementen zijn even groot maar tegengesteld.

Alleen netto bijdragen langs omtrek van oppervlak σ.

Stelling van Stokes

$$\boxed{\oint_{omtrek\ \sigma} \vec{v} \cdot d\vec{r} = \iint_{opp\ \sigma} (\nabla \times \vec{v}) \cdot \hat{n}\, d\sigma}$$

$\hat{n}$: normaal op oppervlak σ volgens rechterhandregel langs integratiepad



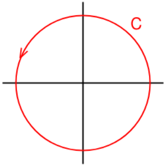
"It's not a terribly efficient process, but it works"

Stelling van Stokes, voorbeeld

Voorbeeld

$\vec{v} = z^2\hat{\imath} + 2x\hat{\jmath} - y^3\hat{k}$

Pad C: cirkel $x^2 + y^2 = 1 \quad (z = 0)$
σ is oppervlak van C



Bereken circulatie van $\vec{v}$ langs C.

$$\text{Circulatie} = \oint_C \vec{v} \cdot d\vec{r} = \iint_\sigma (\nabla \times \vec{v}) \cdot \hat{n}\, d\sigma$$

$$\nabla \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ z^2 & 2x & -y^3 \end{vmatrix} = \hat{\imath}(-3y^2) - \hat{\jmath}(-2z) + \hat{k}(2) = \begin{pmatrix} -3y^2 \\ 2z \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\hat{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (\nabla \times \vec{v}) \cdot \hat{n} = \begin{pmatrix} -3y^2 \\ 2z \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2$$

$$\text{Circulatie} = \iint_\sigma (\nabla \times \vec{v}) \cdot \hat{n}\, d\sigma = \iint_\sigma 2\, d\sigma = 2\pi(1)^2 = 2\pi \quad \text{(5.4 opg. 1a)}$$

Einde

van deze tour door de wiskunde


That's all Folks!