Lineaire Algebra en Vector Analyse

11. Toepassingen vectorrekening, gradiënt, divergentie, rotatie

Hanneke Paulssen

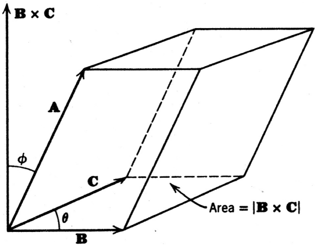
Universiteit Utrecht

Samenvatting

- Toepassingen dot, cross, triple scalar/vector product
- Gradiënt scalarveld ($\nabla\phi$)
- Richtingsafgeleide
- Divergentie vectorveld ($\nabla \cdot \vec{V}$)
- Rotatie vectorveld ($\nabla \times \vec{V}$)

Triple scalar product

Triple scalar product $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$



We hadden gevonden

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

$|\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})|$ is volume lichaam met zijden $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$

met $|\ldots|$ absolute waarde

Triple vector product

Triple vector product $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$

Stel $\vec{D} = \vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$, dan
$\vec{D}$ loodrecht op $\vec{A}$ en
$\vec{D}$ loodrecht op $\vec{B} \times \vec{C} \Rightarrow$ in vlak van $\vec{B}$ en $\vec{C}$
$\Rightarrow \vec{D} = \beta\vec{B} + \gamma\vec{C}$ met β en γ scalars

Uitwerken geeft:

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C}$$

Triple vector product

1. is lineaire combinatie van de 2 vectoren tussen de haakjes
2. coëfficiënt bij elke vector is dot product van andere 2 vectoren
3. middelste vector krijgt $+$teken, andere $-$teken

Triple vector product

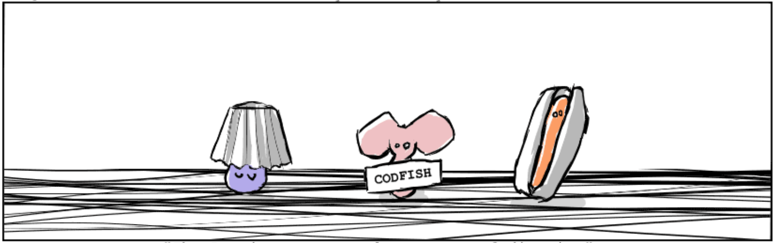
1. lineaire combinantie van de 2 vectoren tussen de haakjes
2. coëfficiënt bij elke vector is dot product van andere 2 vectoren
3. middelste vector krijgt $+$teken, andere $-$teken

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C}$$

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C} = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{B} \cdot \vec{C})\vec{A} \neq \vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$$

$$(\vec{B} \times \vec{C}) \times \vec{A} = (\vec{B} \cdot \vec{A})\vec{C} - (\vec{C} \cdot \vec{A})\vec{B} \quad = -\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$$

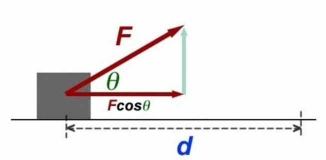
Bunny bunny.frozenreality.co.uk 26 Jun 05



"The Bunnies were truely masters of disguise"

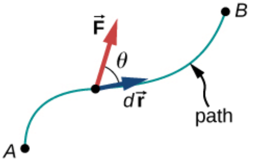
Toepassing dot product: Arbeid

Arbeid = kracht maal weg : $W = Fd$ (scalaire vergelijking)



Maar kracht is vector ($\vec{F}$)
en weg heeft richting ($\vec{d}$).

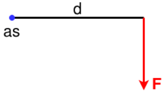
Arbeid alleen door component van kracht in richting van weg:
$W = |\vec{F}| \cos\theta \, |\vec{d}| = \vec{F} \cdot \vec{d}$



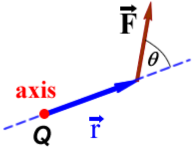
Arbeid dW langs klein stukje weg $d\vec{r}$ verricht door kracht $\vec{F}$:
$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$

Totale arbeid door integratie over pad
$$W = \int_{pad} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Toepassing cross product: Impulsmoment (torque)



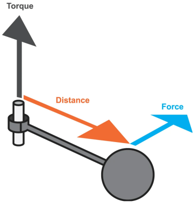
Scalaire vergelijking:
Impulsmoment = kracht maal arm:
$M = Fd$



Alleen component van kracht loodrecht op arm, $\vec{r}$: $|\vec{F}| \sin\theta$

Impulsmoment $\vec{M}$ is vector met

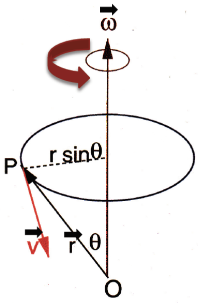
- grootte $|\vec{M}| = |\vec{r}||\vec{F}| \sin\theta$
- draaias en -richting volgens rechterhandregel



$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Toepassing cross product: Hoeksnelheid

Punt draait rond as met hoeksnelheid (angular velocity) ω:



$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \text{met } T \text{ periode}$$

$\vec{\omega}$: grootte en richting van draaias (rechterhandregel)

$\vec{r}$: locatie punt op afstand $r = |\vec{r}|$ tot oorsprong

θ: hoek tussen $\vec{\omega}$ en $\vec{r}$

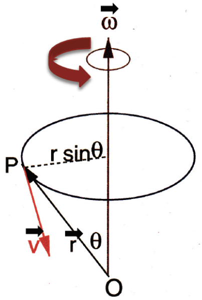
Wat is snelheid v van punt?

$s = vt$

Voor één omwenteling: $s = 2\pi r \sin\theta = vT$

$$v = \frac{2\pi}{T} r \sin\theta = \omega r \sin\theta$$

Toepassing cross product: Hoeksnelheid



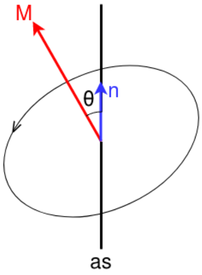
Maar snelheid heeft ook richting: $\vec{v}$

$\vec{v}$: loodrecht op $\vec{\omega}$ en loodrecht op $\vec{r}$

We hadden $v = \omega r \sin\theta$ ofwel $|\vec{v}| = |\vec{\omega}||\vec{r}|\sin\theta$

Ga na dat $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ (niet $\vec{v} = \vec{r} \times \vec{\omega}$)

Toepassing triple scalar product: Impulsmoment om as



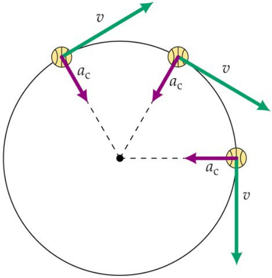
Impulsmoment om as met richting $\hat{n}$, niet loodrecht op draairichting.

$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$

Alleen component van $\vec{M}$ in richting van as draagt bij tot draaiing:

$M_{as} = \hat{n} \cdot \vec{M} = \hat{n} \cdot (\vec{r} \times \vec{F})$

Toepassing triple vector product: centripetale versnelling



Centripetale versnelling van puntmassa draaiend om as met hoeksnelheid $\vec{\omega}$

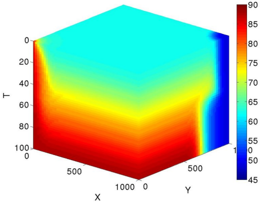
$\vec{a}_c = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$

Zie 6.4: opgave 17


Bunny
bunny.frozenreality.co.uk
31 Aug 05
Bunny (c) H. Davies - All Rights Reserved
sigh
"...but... the Bunny was solar powered..."

Scalarveld

Een scalarveld $\phi(x, y, z)$ heeft een scalaire waarde in elk punt van de ruimte.

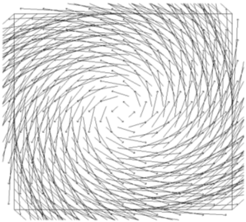


Voorbeelden (fysische grootheden) van scalarvelden zijn:

- temperatuur
- druk
- concentratie
- elektrische potentiaal
- zwaartekrachtspotentiaal

Vectorveld

Een vectorveld $\vec{v}(x, y, z)$ heeft een vector in elk punt van de ruimte.



Voorbeelden (fysische grootheden) van vectorvelden zijn:

- windsnelheid
- snelheid van vloeistofstroming
- magnetische veld
- zwaartekrachtsveld

"Bunny - Crystal Edition"

Gradiënt van scalarveld $\nabla\phi$

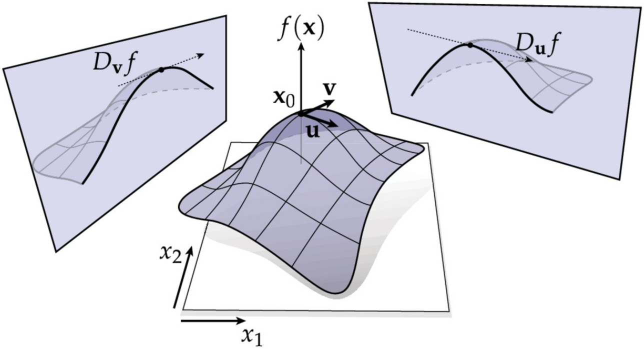
Gradiënt van scalarveld $\phi(x, y, z)$

$$\boxed{\text{grad } \phi = \nabla\phi = \hat{\imath}\frac{\partial\phi}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial\phi}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial\phi}{\partial z} = \begin{pmatrix} \partial\phi/\partial x \\ \partial\phi/\partial y \\ \partial\phi/\partial z \end{pmatrix}}$$

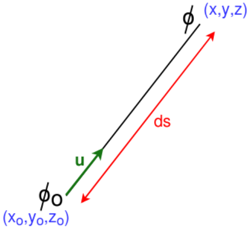
Gradiënt van scalarveld is vectorveld

Richtingsafgeleide

Richtingsafgeleide (directional derivative) is afgeleide van een scalarveld voor een bepaalde richting.



Richtingsafgeleide en gradiënt



Scalarveld in $\vec{r}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ is ϕ_0

Scalarveld in $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ is ϕ

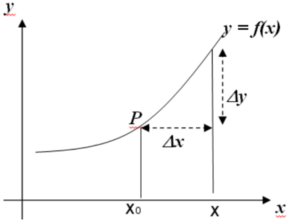
$\hat{u}$: eenheidsvector van $\vec{r}_0$ naar $\vec{r}$

$ds = |\vec{r} - \vec{r}_0|$

$$\vec{r} - \vec{r}_0 = \hat{u} ds \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x \; ds \\ u_y \; ds \\ u_z \; ds \end{pmatrix}$$

$$\phi - \phi_0 \approx \frac{\partial \phi}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial \phi}{\partial y}(y - y_0) + \frac{\partial \phi}{\partial z}(z - z_0)$$

Intermezzo



$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{df}{dx}$$

$$\Delta y = \Delta f \approx \frac{df}{dx} \Delta x = \frac{df}{dx}(x - x_0)$$

$$f(x) = f(x_0) + \Delta f \approx f(x_0) + \frac{df}{dx}(x - x_0)$$

$$f(x) - f(x_0) \approx \frac{df}{dx}(x - x_0)$$

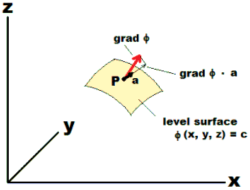
$$\phi(x, y, z) - \phi(x_0, y_0, z_0) \approx \frac{\partial \phi}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial \phi}{\partial y}(y - y_0) + \frac{\partial \phi}{\partial z}(z - z_0)$$

Richtingsafgeleide en gradiënt

$$\begin{aligned}\phi - \phi_0 &\approx \frac{\partial\phi}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial\phi}{\partial y}(y - y_0) + \frac{\partial\phi}{\partial z}(z - z_0) \\ &= \frac{\partial\phi}{\partial x}u_x ds + \frac{\partial\phi}{\partial y}u_y ds + \frac{\partial\phi}{\partial z}u_z ds \\ &= ds\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}u_x + \frac{\partial\phi}{\partial y}u_y + \frac{\partial\phi}{\partial z}u_z\right) \\ &= ds\left(\nabla\phi\cdot\hat{u}\right)\end{aligned}$$

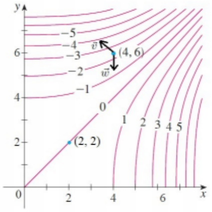
Met $\phi - \phi_0 = d\phi$ en $ds \to 0$ $\boxed{\dfrac{d\phi}{ds} = \nabla\phi\cdot\hat{u}}$

$\dfrac{d\phi}{ds}$ is richtingsafgeleide
van ϕ in richting van $\hat{u}$.



Richtingsafgeleide en gradiënt

$$\frac{d\phi}{ds} = \nabla\phi \cdot \hat{u}$$



- Voor welke richting $\hat{u}$ is $\dfrac{d\phi}{ds} = 0$?

Formule: als $\hat{u}$ loodrecht op $\nabla\phi$

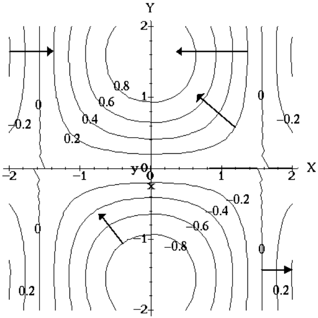
Figuur: als $\hat{u}$ parallel aan contour

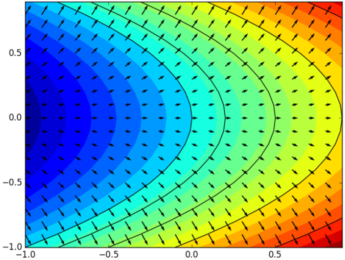
- Voor welke richting $\hat{u}$ is $\dfrac{d\phi}{ds}$ maximaal?

Formule: als $\hat{u}$ in richting van $\nabla\phi$, $\hat{u} = \dfrac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}$

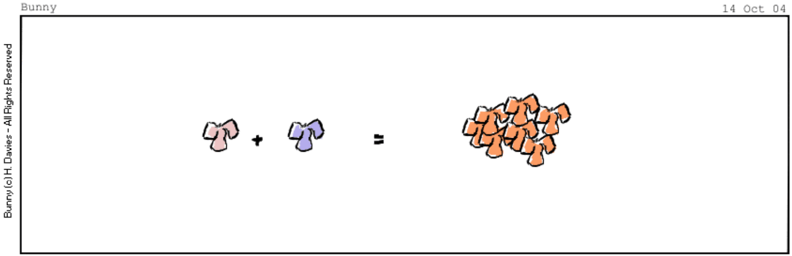
Figuur: als $\hat{u}$ loodrecht op contour

Gradiënt ($\nabla\phi$)





Gradiënt van scalar veld ϕ, $\nabla\phi$, is een vectorveld loodrecht op de contouren van ϕ wijzend in richting van maximale *toename* van ϕ.



"One plus One equals Horde"

Nabla (del) operator ∇

$$\nabla\phi = \hat{\imath}\,\frac{\partial\phi}{\partial x} + \hat{\jmath}\,\frac{\partial\phi}{\partial y} + \hat{k}\,\frac{\partial\phi}{\partial z}$$

$$= \left(\hat{\imath}\,\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\jmath}\,\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\,\frac{\partial}{\partial z}\right)\phi$$

$$= \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix}\phi$$

$$= \nabla\,\phi$$

met $$\boxed{\nabla = \hat{\imath}\,\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\jmath}\,\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\,\frac{\partial}{\partial z} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix}}$$

∇ is een vectoroperator, werkt op een scalar- of vectorveld.

Divergentie van vectorveld $\nabla \cdot \vec{V}$

∇ operator werkend op vectorveld $\vec{V}$ via dot product:

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{V} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}}$$

De divergentie van $\vec{V}$ $\quad (\nabla \cdot \vec{V}\ ,\ \mathrm{div}\vec{V})$ is een scalarveld.

Rotatie (curl) van vectorveld $\nabla \times \vec{V}$

∇ operator werkend op vectorveld $\vec{V}$ via cross product:

$$\boxed{\nabla \times \vec{V} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix}}$$

ofwel

$$\boxed{\nabla \times \vec{V} = \hat{\imath}\left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}\right) - \hat{\jmath}\left(\frac{\partial V_z}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial z}\right) + \hat{k}\left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right)}$$

De rotatie (curl) van $\vec{V}$ $(\nabla \times \vec{V}\,,\ \mathrm{rot}\,\vec{V}\,,\ \mathrm{curl}\,\vec{V})$
is een vectorveld.


Take a break.
You deserve it!