Lineaire Algebra en Vector Analyse

9. Integralen in 2D en 3D

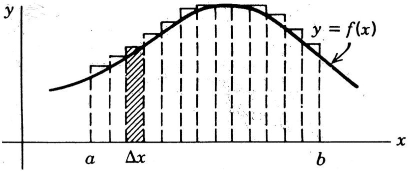
Hanneke Paulssen

Universiteit Utrecht

Samenvatting

- Dubbele integraal in 3D
- 3-Dubbele integraal
- Lijnintegraal

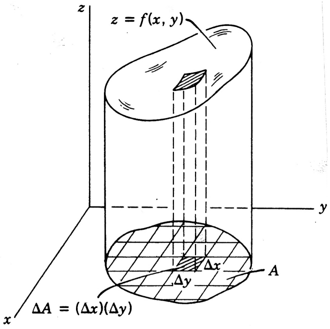
Enkele integraal



Oppervlak onder curve met hoogte $y = f(x)$: $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$

Als $\Delta x \to 0$ en $n \to \infty$: $\int_{x_{min}}^{x_{max}} f(x)\,dx$

Dubbele integraal

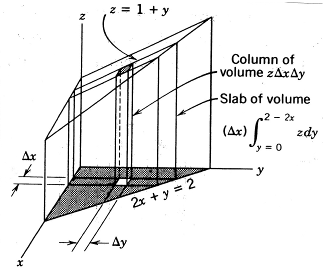


Volume onder oppervlak met hoogte $z = f(x, y)$:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\,\Delta A \qquad \text{met} \qquad \Delta A = \Delta x\,\Delta y$$

Als $\Delta x, \Delta y \to 0$ en $n \to \infty$: $\quad \iint_A f(x, y)\, dxdy$

Dubbele integraal



Hoogte $z = f(x, y)$.

Volume onder z met grondvlak x_{min} tot x_{max} en y_{min} tot y_{max}.

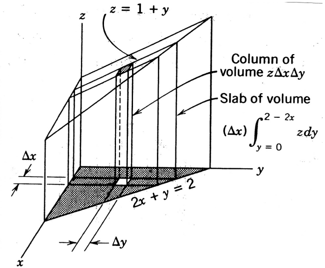
(a) Voor één waarde van x, oppervlak in y-z vlak onder $f(x, y)$

$$\int_{y_{min}}^{y_{max}} f(x, y)\, dy \quad \text{met } x = \text{constant}$$

Nu oppervlakken voor verschillende x sommeren: integreren over x

$$\text{Volume} = \int_{x_{min}}^{x_{max}} \left[\int_{y_{min}}^{y_{max}} f(x, y) dy \right] dx \qquad (1)$$

Dubbele integraal



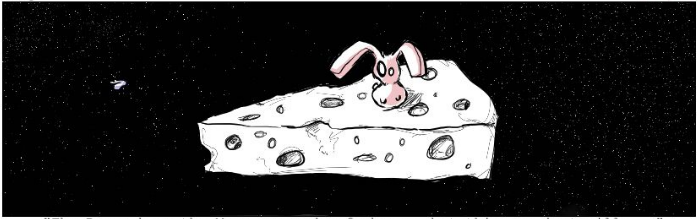
(b) Voor één waarde van y, oppervlak in x-z vlak onder $f(x, y)$

$$\int_{x_{min}}^{x_{max}} f(x, y)\, dx \text{ met } y = \text{constant}$$

$$\text{Volume} = \int_{y_{min}}^{y_{max}} \left[\int_{x_{min}}^{x_{max}} f(x, y) dx \right] dy \qquad (2)$$

$$\boxed{\iint_A f(x, y)\, dxdy = \int_{x_{min}}^{x_{max}} \int_{y_{min}}^{y_{max}} f(x, y)\, dydx = \int_{y_{min}}^{y_{max}} \int_{x_{min}}^{x_{max}} f(x, y)\, dxdy}$$

Bunny 01 Sep 04



"The Bunny knew the Moon was made of cheese, but this was just silly..."

Dubbele integraal, voorbeeld 1

Voorbeeld $z = f(x, y) = x^2 + y^2$

Grondvlak A: $x = [-1, 1], \quad y = [0, 1]$

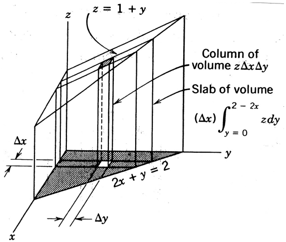
$$\int\limits_{y=0}^{1} \int\limits_{x=-1}^{1} (x^2 + y^2)\, dxdy = \int\limits_{y=0}^{1} \left[\tfrac{1}{3}x^3 + y^2 x\right]_{x=-1}^{1} dy =$$

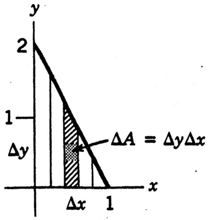
$$\int\limits_{y=0}^{1} \tfrac{2}{3} + 2y^2\, dy = \left[\tfrac{2}{3}y + \tfrac{2}{3}y^3\right]_{y=0}^{1} = \tfrac{4}{3}$$

Ga zelf na dat $\int\limits_{x=-1}^{1} \int\limits_{y=0}^{1} (x^2 + y^2)\, dydx$ hetzelfde geeft.

Dubbele integraal, voorbeeld 2

Voorbeeld





$z = f(x, y) = 1 + y$

$x_{min} = 0, \quad x_{max} = 1$

$y_{min} = 0, \quad y_{max} = 2 - 2x$

Grens van y is afhankelijk van x $\Rightarrow$ y-integraal eerst berekenen.

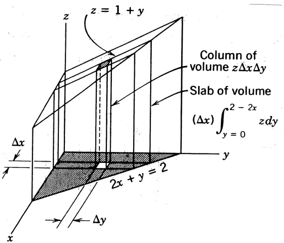
$$\int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{2-2x} (1 + y)\, dydx = \int_{x=0}^{1} \left[y + \tfrac{1}{2}y^2\right]_{y=0}^{2-2x} dx =$$

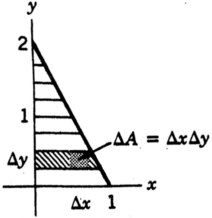
$$\int_{x=0}^{1} (2 - 2x) + \tfrac{1}{2}(2 - 2x)^2\, dx = \int_{x=0}^{1} (4 - 6x + 2x^2) dx =$$

$$\left[4x - 3x^2 + \tfrac{2}{3}x^3)\right]_{x=0}^{1} = 4 - 3 + \tfrac{2}{3} = \tfrac{5}{3}$$

Dubbele integraal, voorbeeld 2

Voorbeeld Integratievolgorde omgekeerd.





$z = f(x, y) = 1 + y$

$y_{min} = 0, \quad y_{max} = 2$

$x_{min} = 0, \quad x_{max} = 1 - \frac{1}{2}y$

Grens van x is afhankelijk van y $\Rightarrow$ x-integraal eerst berekenen.

$$\int_{y=0}^{2} \int_{x=0}^{1-\frac{1}{2}} (1 + y)\, dxdy = \cdots = \frac{5}{3}$$

Mag je een rechthoekig grondvlak nemen met $x = [0, 1]$ en $y = [0, 2]$, integraal uitrekenen, en resultaat delen door twee? Nee!

Vaste grenswaardes bij buitenste integraal.

3-Dubbele integraal

Volume van grondvlak $z_{min} = 0$ tot $z_{max} = f(x, y)$

$$\int_{x_{min}}^{x_{max}} \int_{y_{min}}^{y_{max}} f(x, y)\, dydx$$

Anders:

$$\text{Volume} = \sum_{i=1}^{n} \Delta x \Delta y \Delta z$$

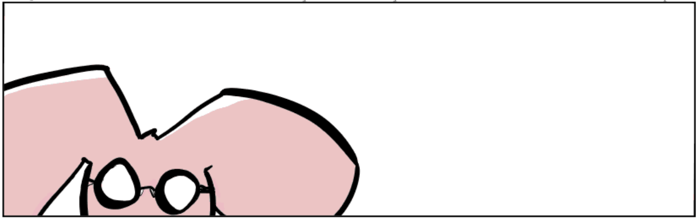
Met $\Delta x, \Delta y, \Delta z \to 0$ en $n \to \infty$: Volume $= \iiint\limits_V \, dxdydz$

$$\boxed{\text{Volume} = \int_{x_{min}}^{x_{max}} \int_{y_{min}}^{y_{max}} \int_{z_{min}}^{z_{max}} dzdydx} = \int_{y_{min}}^{y_{max}} \int_{x_{min}}^{x_{max}} \int_{z_{min}}^{z_{max}} dzdxdy$$

$$\int_{x_{min}}^{x_{max}} \int_{y_{min}}^{y_{max}} \int_{z_{min}}^{z_{max}} dzdydx = \int_{x_{min}}^{x_{max}} \int_{y_{min}}^{y_{max}} (z_{max} - z_{min})\, dydx$$

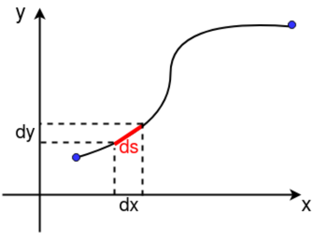
Analoog bijv.: Massa $= \iiint\limits_V \rho \, dxdydz$ met ρ dichtheid

Bunny bunny.frozenreality.co.uk 29 Apr 06



"The Bunny looked so intellectual"

Lijnintegraal



Lijnintegraal:

$$\int_{\textit{langs curve}} ds$$

In 2-D: $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$

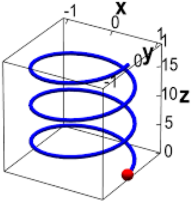
$$ds = [dx^2 + dy^2]^{\frac{1}{2}} = \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} dx$$

$$\left[\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1\right]^{\frac{1}{2}} dy$$

Soms andere parameterisatie handiger.

Voorbeeld

Lengte schroefdraad (helix)
voor één rondgang



$x = \cos t$
$y = \sin t$
$z = t \quad$ ('spoed')

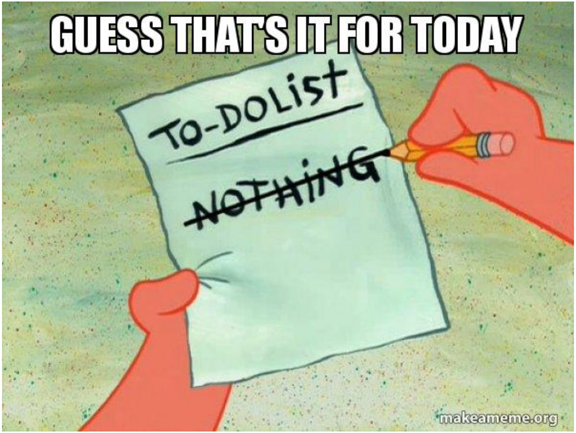
Eén rondgang: $t = [0, 2\pi]$

$$ds = [dx^2 + dy^2 + dz^2]^{\frac{1}{2}} = \left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} dt$$

$$\frac{dx}{dt} = -\sin t, \quad \frac{dy}{dt} = \cos t, \quad \frac{dz}{dt} = 1$$

$$s = \int ds =$$

$$\int\limits_{t=0}^{2\pi} \left[(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + 1\right]^{\frac{1}{2}} dt = \int\limits_{t=0}^{2\pi} \sqrt{2} dt = 2\pi\sqrt{2}$$


GUESS THAT'S IT FOR TODAY
TO-DOLIST
~~NOTHING~~
makeameme.org