Lineaire Algebra en Vector Analyse

8. Eigenwaarden en eigenvectoren

Hanneke Paulssen

Universiteit Utrecht

Samenvatting

- Eigenwaarden, eigenvectoren: definitie
- Eigenwaarden, eigenvectoren: begrip
- Matrix diagonalisatie
- Transformatiematrix C
- Diagonaalmatrix D

Eigenwaarden en eigenvectoren

Stel we hebben transformatiematrix M.

Dan $\vec{r'} = \mathrm{M}\vec{r}$: transformatie van punt $\vec{r}$ naar $\vec{r'}$ door M

- Eigenvectoren: vectoren die bij transformatie niet van richting veranderen: $\mathrm{M}\vec{r} = \lambda\vec{r}$
- Eigenwaarden: constanten λ bij die eigenvectoren ($\vec{r'} = \lambda\vec{r}$, λ is vermenigvuldigingsfactor van eigenvector $\vec{r}$)

Als $\vec{r}$ eigenvector van M en k constante, dan $k\vec{r}$ ook eigenvector (met zelfde eigenwaarde).

Eigenwaarden en eigenvectoren, voorbeeld

Voorbeeld

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{eigenvector: } \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{eigenwaarde: } \lambda$$

$\mathrm{M}\vec{r} = \lambda\vec{r}$:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{ll} 3x + 2y & = \lambda x \\ -x & = \lambda y \end{array}$$

$$\begin{aligned} (3-\lambda)x + 2y &= 0 \\ -x - \lambda y &= 0 \end{aligned}$$

Homogene vergelijkingen met triviale oplossing $x, y = 0$.
Andere oplossingen als vergelijkingen afhankelijk $\Rightarrow$ determinant coëfficiëntenmatrix $= 0$: karakterestieke vergelijking

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{array}{l} \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \\ (\lambda - 2)(\lambda - 1) = 0 \\ \lambda_1 = 2 \qquad \lambda_2 = 1 \ : \text{ eigenwaarden} \end{array}$$

Eigenwaarden en eigenvectoren, voorbeeld

$M\vec{r} = \lambda\vec{r}$ gaf $\begin{aligned}(3-\lambda)x + 2y &= 0\\ -x - \lambda y &= 0\end{aligned}$

- Eigenwaarde $\lambda_1 = 2$. Wat is bijbehorende eigenvector?

  $\left.\begin{aligned} x + 2y &= 0 \\ -x - 2y &= 0 \end{aligned}\right\}$ afhankelijke vergelijkingen

  Kies een vector $\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ die aan de vergelijkingen voldoet.

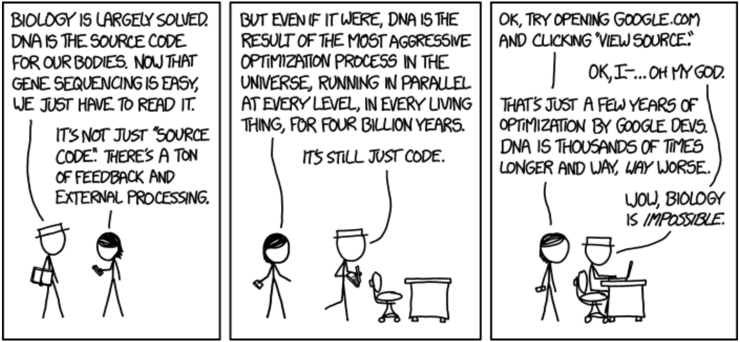
  Bijv. $\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ of $\hat{r}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

  $M\vec{r}_1 = 2\vec{r}_1$: Door M worden de plaatsvectoren in richting $\vec{r}_1$ met een factor 2 verlengd.

- $\lambda_2 = 1$. Wat is bijbehorende eigenvector?

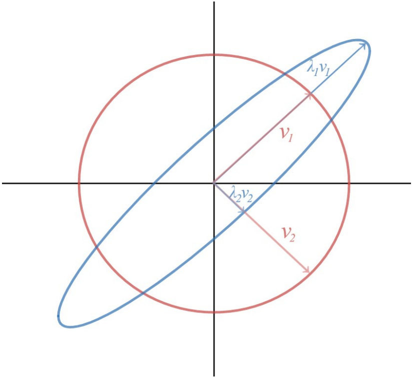
  $\left.\begin{aligned} 2x + 2y &= 0 \\ -x - y &= 0 \end{aligned}\right\}$ Bijv. $\vec{r}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ of $\hat{r}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

  $M\vec{r}_2 = 1\vec{r}_2$: In richting $\vec{r}_2$ blijven de vectoren even lang.


BIOLOGY IS LARGELY SOLVED. DNA IS THE SOURCE CODE FOR OUR BODIES. NOW THAT GENE SEQUENCING IS EASY, WE JUST HAVE TO READ IT.
IT'S NOT JUST "SOURCE CODE." THERE'S A TON OF FEEDBACK AND EXTERNAL PROCESSING.
BUT EVEN IF IT WERE, DNA IS THE RESULT OF THE MOST AGGRESSIVE OPTIMIZATION PROCESS IN THE UNIVERSE, RUNNING IN PARALLEL AT EVERY LEVEL, IN EVERY LIVING THING, FOR FOUR BILLION YEARS.
IT'S STILL JUST CODE.
OK, TRY OPENING GOOGLE.COM AND CLICKING "VIEW SOURCE."
OK, I–... OH MY GOD.
THAT'S JUST A FEW YEARS OF OPTIMIZATION BY GOOGLE DEVS. DNA IS THOUSANDS OF TIMES LONGER AND WAY, WAY WORSE.
WOW, BIOLOGY IS IMPOSSIBLE.

Eigenwaarden en eigenvectoren: illustratie

Rood: eenheidscirkel
Blauw: punten van eenheidscirkel na transformatie door zekere matrix M met eigenvectoren $\vec{v}_1$ en $\vec{v}_2$ en eigenwaarden λ_1 en λ_2, d.w.z. alle punten $\vec{r}' = M\vec{r}$ met $\vec{r}$ punten van de eenheidscirkel.

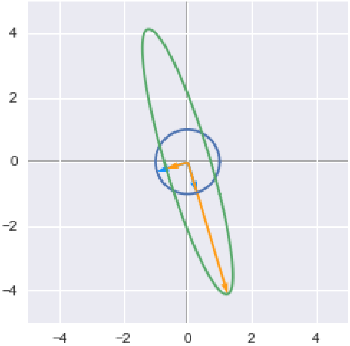


Eigenwaarden en eigenvectoren: illustratie

$$\mathsf{M} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 4.3, \;\; \hat{r}_1 = \begin{pmatrix} 0.29 \\ -0.96 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 0.7, \;\; \hat{r}_2 = \begin{pmatrix} -0.96 \\ -0.29 \end{pmatrix}$$

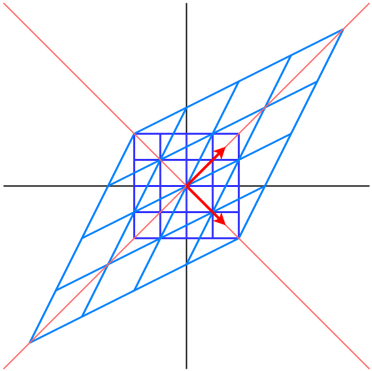


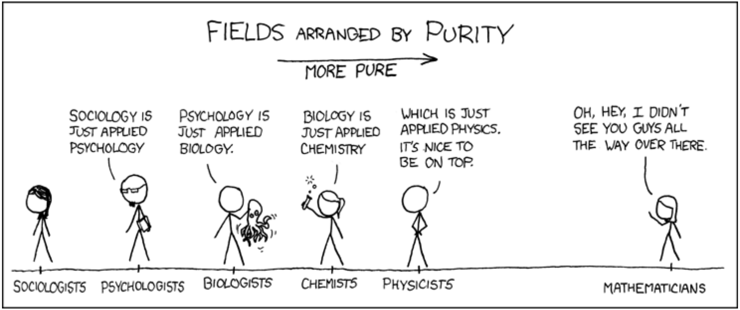
Eigenwaarden en eigenvectoren: illustratie

$$\mathsf{M} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 3,\ \hat{r}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 1,\ \hat{r}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$




FIELDS ARRANGED BY PURITY
MORE PURE
SOCIOLOGY IS JUST APPLIED PSYCHOLOGY
PSYCHOLOGY IS JUST APPLIED BIOLOGY.
BIOLOGY IS JUST APPLIED CHEMISTRY
WHICH IS JUST APPLIED PHYSICS. IT'S NICE TO BE ON TOP.
OH, HEY, I DIDN'T SEE YOU GUYS ALL THE WAY OVER THERE.
SOCIOLOGISTS
PSYCHOLOGISTS
BIOLOGISTS
CHEMISTS
PHYSICISTS
MATHEMATICIANS

M, diagonaalmatrix eigenwaarden, matrix eigenvectoren

$$\mathsf{M} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$$

Eigenwaarde λ_1 met eigenvector $\hat{u}$
Eigenwaarde λ_2 met eigenvector $\hat{v}$

Vind relatie tussen M, diagonaalmatrix van eigenwaarden (D) en matrix van eigenvectoren (C).

Stap **1**

$\mathsf{M}\hat{u} = \lambda_1 \hat{u}$

$$\begin{aligned} m_{11} u_1 + m_{12} u_2 &= \lambda_1 u_1 \\ m_{21} u_1 + m_{22} u_2 &= \lambda_1 u_2 \end{aligned}$$

$\mathsf{M}\hat{v} = \lambda_2 \hat{v}$

$$\begin{aligned} m_{11} v_1 + m_{12} v_2 &= \lambda_2 v_1 \\ m_{21} v_1 + m_{22} v_2 &= \lambda_2 v_2 \end{aligned}$$

M, diagonaalmatrix eigenwaarden, matrix eigenvectoren

Stap **2**

Definieer matrix C: matrix van eigenvectoren (kolommen)

$$C = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}$$

Definieer diagonaalmatrix D: diagonaalmatrix van eigenwaarden

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Let op: in zelfde volgorde als matrix eigenvectoren.

Bereken CD:

$$CD = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 u_1 & \lambda_2 v_1 \\ \lambda_1 u_2 & \lambda_2 v_2 \end{pmatrix}$$

M, diagonaalmatrix eigenwaarden, matrix eigenvectoren

Stap **3** Bereken MC:

$$\mathrm{MC} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} m_{11}u_1 + m_{12}u_2 & m_{11}v_1 + m_{12}v_2 \\ m_{21}u_1 + m_{22}u_2 & m_{21}v_1 + m_{22}v_2 \end{pmatrix} =$$

$\Downarrow$ Stap **1**

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 u_1 & \lambda_2 v_1 \\ \lambda_1 u_2 & \lambda_2 v_2 \end{pmatrix} =$$

$\Downarrow$ Stap **2**

CD

$$\boxed{\mathrm{MC} = \mathrm{CD}}$$

Als C inverteerbaar ($\det \mathrm{C} \neq 0$), dan

$$\boxed{\mathrm{C}^{-1}\mathrm{MC} = \mathrm{D}}$$

Interpretatie matrix van eigenvectoren C

- C beschrijft transformatie van coördinatenstelsel van eigenvectoren (hier: $\hat{u}$, $\hat{v}$) naar oorspronkelijke coördinatenstelsel (hier: $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$)

$\vec{P}$ in oorspronkelijke coördinatenstelsel:

$$\vec{P} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} = x\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

Zelfde punt $\vec{P}$ in coördinatenstelsel van eigenvectoren:

$$\vec{P} = x'\hat{u} + y'\hat{v} = x'\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix} + y'\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}u_1 & v_1\\u_2 & v_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} \quad \text{ofwel} \quad \vec{P} = \mathrm{C}\vec{P}' \;\text{ met }\; \vec{P}' = \begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$$

$\vec{P}'$ wordt na transformatie (matrixvermenigvuldiging) met C
$\vec{P}$ in oorspronkelijke coördinatenstelsel.

Interpretatie matrix D

- $D = C^{-1}MC$ beschrijft dezelfde (punten)transformatie als M in oorspronkelijke coördinatenstelsel, maar nu in het coördinatenstelsel van eigenvectoren

$\vec{r}$: punt in oorspronkelijke coördinatenstelsel
$\vec{r'}$: zelfde punt in coördinatenstelsel van eigenvectoren
$\vec{r} = C\vec{r'}$: transformatie van stelsel eigenvectoren naar oorspronkelijk
$\vec{r'} = C^{-1}\vec{r}$: transformatie van oorspronkelijk naar stelsel eigenvectoren
$\vec{r}_M = M\vec{r}$: $\vec{r}$ getransformeerd door M in oorspronkelijke coördinatenstelsel
$\vec{r'}_M = C^{-1}\vec{r}_M$: door M getransformeerde punt, nu in stelsel eigenvectoren

$$\begin{aligned} D\vec{r'} &= C^{-1}MC\vec{r'} \qquad \text{(we hadden } D = C^{-1}MC\text{)} \\ &= C^{-1}M\vec{r} \\ &= C^{-1}\vec{r}_M \\ D\vec{r'} &= \vec{r'}_M \end{aligned}$$

$M\vec{r} = \vec{r}_M$ en $D\vec{r'} = \vec{r'}_M$ beschrijven dezelfde puntentransformatie:
M in oorspronkelijke stelsel, D in coördinatenstelsel van eigenvectoren.
D in coördinatensysteem van eigenvectoren is handiger om transformatie te beschrijven dan M in oorspronkelijke stelsel.


THIS IS YOUR MACHINE LEARNING SYSTEM?
YUP! YOU POUR THE DATA INTO THIS BIG PILE OF LINEAR ALGEBRA, THEN COLLECT THE ANSWERS ON THE OTHER SIDE.
WHAT IF THE ANSWERS ARE WRONG?
JUST STIR THE PILE UNTIL THEY START LOOKING RIGHT.
DATA
ANSWERS

M, C en D: voorbeeld

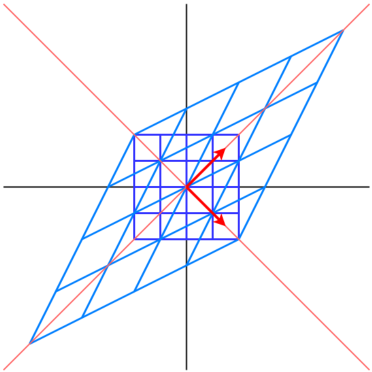
$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 3,\ \hat{r}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 1,\ \hat{r}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$



M, C en D: voorbeeld

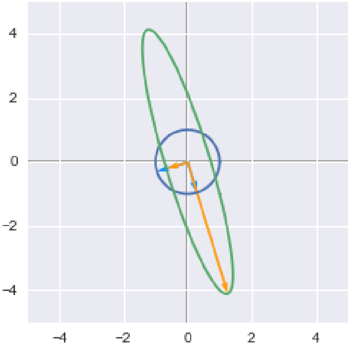
$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 4.3, \;\; \hat{r}_1 = \begin{pmatrix} 0.29 \\ -0.96 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 0.7, \;\; \hat{r}_2 = \begin{pmatrix} -0.96 \\ -0.29 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 4.3 & 0 \\ 0 & 0.7 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0.29 & -0.96 \\ -0.96 & -0.29 \end{pmatrix}$$



M, C en D: voorbeeld

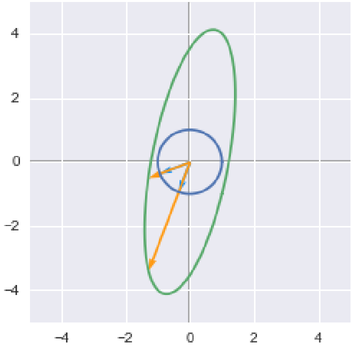
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 3.6, \ \ \hat{r}_1 = \begin{pmatrix} -0.36 \\ -0.93 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 1.4, \ \ \hat{r}_2 = \begin{pmatrix} -0.93 \\ -0.36 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 3.6 & 0 \\ 0 & 1.4 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} -0.36 & -0.93 \\ -0.93 & -0.36 \end{pmatrix}$$



Feiten over matrix diagonalisatie

Als M symmetrisch, dan

1. Eigenwaarden zijn reëel
2. Eigenvectoren zijn orthogonaal

Als M symmetrisch en C is matrix van eenheidseigenvectoren, dan is C orthogonaal: $C^{-1} = C^{T}$

Niet alle vierkante matrices kunnen gediagonaliseerd worden.

Een rotatiematrix in 2D heeft geen reële eigenwaarden.

Een rotatiematrix in 3D heeft eigenvector in richting rotatieas (met eigenwaarde 1).

Eigenvectoren: lineair onafhankelijk

Let op: Eigenvectoren moeten lineair onafhankelijk zijn, anders spannen ze geen ruimte (met dezelfde dimensie) op.

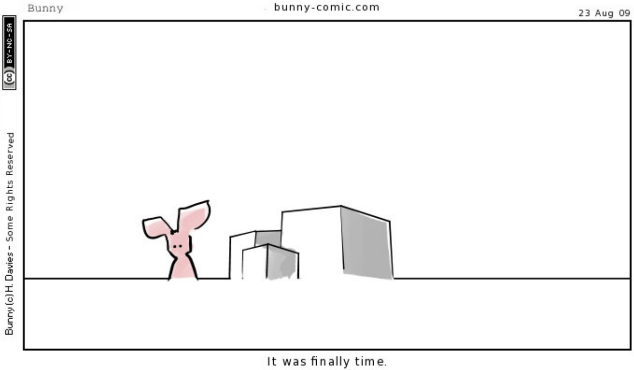
Eigenwaardes kunnen gelijk zijn.

Voorbeeld

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad -\lambda(1-\lambda)^2 = 0 \qquad \lambda_1 = 0,\ \lambda_{2,3} = 1$$

- $\lambda_1 = 0 \qquad \left.\begin{array}{r} 0x + 0y + 0z = 0 \\ 1y \qquad = 0 \\ 1x \qquad + 1z = 0 \end{array}\right\} \quad \vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ of $\hat{r}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$
- $\lambda_{2,3} = 1 \qquad \left.\begin{array}{r} -x = 0 \\ 0 = 0 \\ x = 0 \end{array}\right\}$ elke vector $\begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix}$ Bijv. $\hat{r}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\hat{r}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$


Bunny
bunny-comic.com
23 Aug 09
(cc) BY-NC-SA
Bunny (c) H. Davies - Some Rights Reserved
It was finally time.