Lineaire Algebra en Vector Analyse

7: Indexnotatie, homogene lineaire vergelijkingen

Hanneke Paulssen

Universiteit Utrecht

Samenvatting

- Symmetrische en antisymmetrische matrix
- Indexnotatie: matrixvermenigvuldiging
- Kronecker delta
- Indexnotatie: getransponeerde van matrixproduct
- Spoor matrix
- Einstein sommatieconventie
- Homogene lineaire vergelijkingen

Speciale matrices

- Symmetrische matrix: $A^T = A$

  Voorbeeld $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

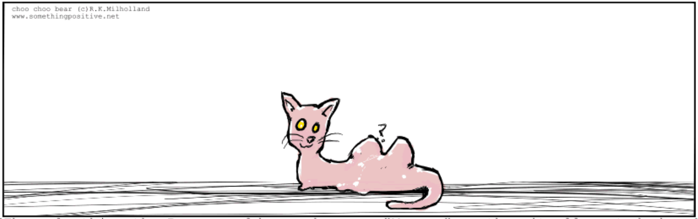
- Antisymmetrische matrix: $A^T = -A$

  Voorbeeld $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

- Orthogonale matrix: $A^T = A^{-1}$

Overige termen uit boek sectie 3.9 niet, ook niet voor opgave 3.9: 7

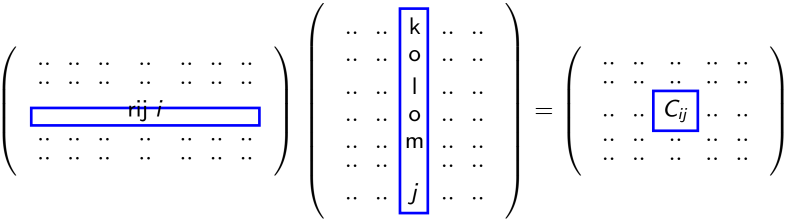
Bunny 17 Nov 04



"The only thing the Bunny could remember was "Murrrr"... then it all went dark..."

Matrixvermenigvuldiging, indexnotatie

$$AB = C$$



Element C_{ij} (i^e rij, j^e kolom) van matrix C:
Vermenigvuldig elementen van rij i van A met elementen van kolom j van B en sommeer:

$$C_{ij} = A_{i1}B_{1j} + A_{i2}B_{2j} + A_{i3}B_{3j} + ... = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{kj}$$

$$\boxed{C_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{kj}}$$

met n = aantal kolommen van A = aantal rijen van B

Matrixvermenigvuldiging, indexnotatie

Als n vanzelfsprekend: $C_{ij} = \sum_k A_{ik} B_{kj}$

Let op: C_{ij} is één element van matrix, C is hele matrix

$C_{ij} =$ C is FOUT

Voorbeeld C $= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $C_{11} = 1, C_{12} = 2, \ldots$

We hadden AB $\neq$ BA

Geldt $\sum_k A_{ik} B_{kj} = \sum_k B_{kj} A_{ik}$?

Ja, want $A_{i1} B_{1j} + A_{i2} B_{2j} + \ldots = B_{1j} A_{i1} + B_{2j} A_{i2} + \ldots$

Kronecker delta

Kronecker delta δ_{ij} voor elementen van eenheidsmatrix I

$$\boxed{\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{als } i = j \\ 0 & \text{als } i \neq j \end{cases}}$$

Voorbeeld

$$\mathrm{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{pmatrix}$$

Bewijs $\mathrm{AI} = \mathrm{A}$ met indexnotatie

Element op rij i en kolom j van matrix AI is $(\mathrm{AI})_{ij}$

$$(\mathrm{AI})_{ij} = \sum_k A_{ik}\mathrm{I}_{kj} = \sum_k A_{ik}\delta_{kj} = A_{ij}$$

Bijv.: $(\mathrm{AI})_{12} = A_{11}\underbrace{\delta_{12}}_{0} + A_{12}\underbrace{\delta_{22}}_{1} + A_{13}\underbrace{\delta_{32}}_{0} + \underbrace{\ldots\ldots}_{0} = A_{12}$

Dus: $\delta_{ij} = 0$ behalve als sommatie-index k gelijk is aan j

$\Rightarrow A_{ik}\delta_{kj} = 0$, behalve als $k = j$ dan $A_{ik}\delta_{kj} = A_{ij}\delta_{jj} = A_{ij}$.

Bewijs: $(\mathrm{AB})^\mathsf{T} = \mathrm{B}^\mathsf{T}\mathrm{A}^\mathsf{T}$ met indexnotatie

A en B zijn vierkante matrices.
Wat is $(\mathrm{AB})^\mathsf{T}$ uitgedrukt in A^T en B^T ?

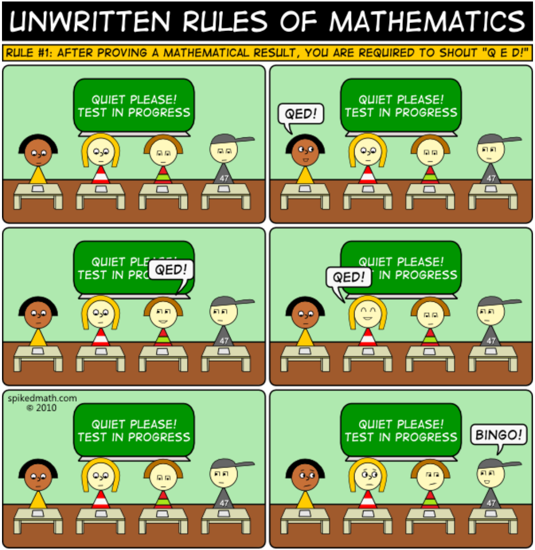
† Algemeen: $C_{ij} = (AB)_{ij} = \sum_k A_{ik} B_{kj}$

Element op rij i en kolom j van $(\mathrm{AB})^\mathsf{T}$ is $(AB)^\mathsf{T}_{ij}$.

$$(AB)^\mathsf{T}_{ij} = (AB)_{ji} =^\dagger \sum_k A_{jk} B_{ki} = \sum_k A^\mathsf{T}_{kj} B^\mathsf{T}_{ik} = \sum_k B^\mathsf{T}_{ik} A^T_{kj} =^\dagger (\mathrm{B}^\mathsf{T} A^\mathsf{T})_{ij}$$

$(AB)^\mathsf{T}_{ij} = (B^T A^\mathsf{T})_{ij}$ voor elk element matrix $\Rightarrow$

$(\mathrm{AB})^\mathsf{T} = \mathrm{B}^\mathsf{T}\mathrm{A}^\mathsf{T}$


UNWRITTEN RULES OF MATHEMATICS
RULE #1: AFTER PROVING A MATHEMATICAL RESULT, YOU ARE REQUIRED TO SHOUT "Q E D!"
QUIET PLEASE! TEST IN PROGRESS
QED!
QUIET PLEASE! TEST IN PROGRESS
QED!
QED!
spikedmath.com © 2010
QUIET PLEASE! TEST IN PROGRESS
QUIET PLEASE! TEST IN PROGRESS
BINGO!

Spoor van matrix en Einstein sommatieconventie

Spoor (trace) vierkante matrix: som elementen hoofddiagonaal

Voorbeeld $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad \mathrm{Tr}(A) = 1 + 5 + 9 = 15$

$$\boxed{\mathrm{Tr}(A) = \sum_k A_{kk}} \qquad = \sum_i A_{ii} = A_{11} + A_{22} + A_{33} + \ldots$$

Einstein sommatieconventie (Boek sectie 10.3)

Als een index dubbel voorkomt in een term, dan impliceert dat automatisch een sommatie over die term.

Voorbeeld $\quad \underbrace{A_{ik} B_{kj}}_{\textit{sommatieconventie}} \quad = \quad \underbrace{\sum_k A_{ik} B_{kj}}_{\textit{geen sommatieconventie}}$

Voorbeeld $\quad A_{kk} = \sum_k A_{kk}$

Geef aan als sommatieconventie gebruikt wordt.

Dot product n-dimensionale ruimte

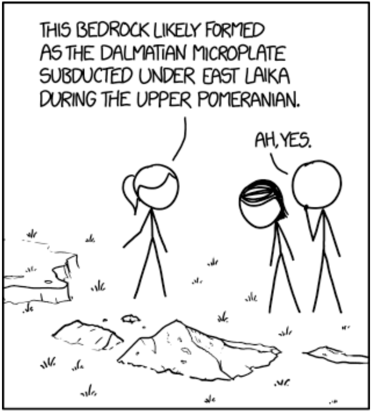
3D: $\vec{A} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}$ $\vec{B} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix}$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3 = \sum_{i=1}^{3} A_i B_i = A_i B_i \ \textit{(sommatieconventie)}$$

nD: $\vec{A} = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}$ $\vec{B} = \begin{pmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_n \end{pmatrix}$ $\qquad \vec{A} \cdot \vec{B} = \sum_{i=1}^{n} A_i B_i$

Norm $\vec{A} = |\vec{A}| = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + \cdots + A_n^2}$

Vectoren $\vec{A}$ en $\vec{B}$ zijn orthogonaal als $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$, ofwel $\sum_{i=1}^{n} A_i B_i = 0$



GEOLOGY TIP: THERE ARE SO MANY MICROPLATES AND AGES THAT NO ONE REMEMBERS THEM ALL, SO IN A PINCH YOU CAN BLUFF WITH DOG BREEDS.

Homogene lineaire vergelijkingen

Homogene lineaire vergelijkingen zijn lineaire vergelijkingen met constante rechts van $=$ teken gelijk aan 0.

Voorbeeld

$$\begin{aligned} x + y &= 0 \\ x + 2y &= 0 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{array} \right) \qquad \mathrm{A}\vec{r} = \vec{0}$$

De 2 vergelijkingen hebben oplossing x=0, y=0 ($\vec{r} = \vec{0}$).

Algemeen: Een stelsel homogene lineaire vergelijkingen heeft altijd als oplossing: alle onbekenden zijn gelijk aan 0.
Dit is de triviale oplossing.

Homogene lineaire vergelijkingen

Homogene lineaire vergelijkingen met van determinant coëficiënten-matrix =0 hebben ook andere oplossingen dan triviale oplossing.

Voorbeeld

$$\begin{aligned} x + \ \ y &= 0 \\ 2x + 2y &= 0 \end{aligned} \qquad \mathrm{A}\vec{r} = \vec{0} \quad \text{met} \quad \mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$\det \mathrm{A} = 0 \quad \Rightarrow \quad$ vergelijkingen zijn lineair afhankelijk.

Oplossing: $x = -y$

Hom. lin. vergelijkingen $\Leftrightarrow$ eigenwaarden en eigenvectoren

Gegeven: $A\vec{r} = \lambda\vec{r}$ met $\lambda =$ constante

Gevraagd: Zijn er andere oplossingen dan $\vec{r} = \vec{0}$ voor zekere waarden van λ?

Voorbeeld $\quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} \qquad \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$A\vec{r} = \lambda\vec{r}$: $\quad \begin{array}{l} 2x + 3y = \lambda x \\ 3x - 6y = \lambda y \end{array} \qquad \begin{array}{rcrcl} (2-\lambda)x & + & 3y & = & 0 \\ 3x & + & (-6-\lambda)y & = & 0 \end{array}$

De vergelijkingen zijn lineair afhankelijk als determinant coëfficiëntenmatrix =0.

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 3 & -6-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$(2-\lambda)(-6-\lambda) - 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad -12 - 2\lambda + 6\lambda + \lambda^2 - 9 = 0$

$\lambda^2 + 4\lambda - 21 = 0 \quad \Rightarrow \quad (\lambda + 7)(\lambda - 3) = 0$

Voor $\lambda = -7$ en $\lambda = 3$ zijn er andere oplossingen dan $x, y = 0$.

Hom. lin. vergelijkingen $\leftrightarrow$ eigenwaarden en eigenvectoren

We hadden

$$A\vec{r} = \lambda\vec{r} \quad \text{met} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} \qquad \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

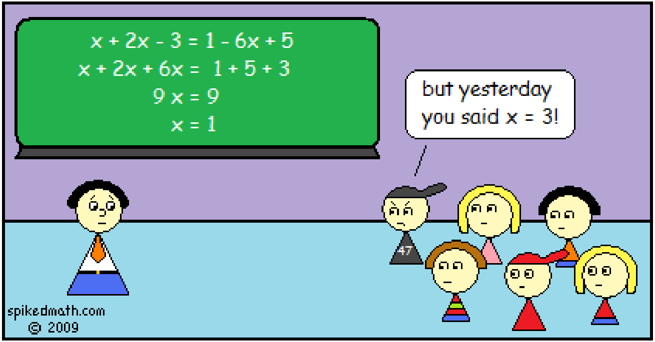
$$\begin{array}{c} 2x + 3y = \lambda x \\ 3x - 6y = \lambda y \end{array} \quad \text{of} \quad \begin{array}{rcrcl} (2-\lambda)x & + & 3y & = & 0 \\ 3x & + & (-6-\lambda)y & = & 0 \end{array}$$

Voor $\lambda = -7$:

$$\left.\begin{array}{rcrcl} 9x & + & 3y & = & 0 \\ 3x & + & y & = & 0 \end{array}\right\} \quad y = -3x \quad \text{Bijv. } \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Voor $\lambda = 3$:

$$\left.\begin{array}{rcrcl} -x & + & 3y & = & 0 \\ 3x & - & 9y & = & 0 \end{array}\right\} \quad x = 3y \quad \text{Bijv. } \vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$


x + 2x - 3 = 1 - 6x + 5
x + 2x + 6x = 1 + 5 + 3
9 x = 9
x = 1
but yesterday you said x = 3!
47
spikedmath.com
© 2009

Hint: sectie 3.8 opgave 25

$$\begin{vmatrix} \boxed{-(1+\lambda) \quad 1 \quad 3} \\ 1 & (2-\lambda) & 0 \\ 3 & 0 & (2-\lambda) \end{vmatrix} = 0$$

$$-(1+\lambda)\Big[(2-\lambda)^2\Big] - 1\Big[(2-\lambda)\Big] + 3\Big[-3(2-\lambda)\Big] = 0$$

$$(2-\lambda)\Big[..\lambda^2 + ..\lambda + ..\Big] = 0$$

Schrijf niet om naar 3e graads vergelijking in λ, maar haal de $(2-\lambda)$ term buiten de haken. Je houdt dan een 2e graads vergelijking in λ over tussen [...].

Hint: sectie 3.11 opgave 23

$$\begin{vmatrix} 13-\lambda & 4 & -2 \\ 4 & 13-\lambda & -2 \\ -2 & -2 & 10-\lambda \end{vmatrix} \xrightarrow{K2' = K2 - K1} =$$

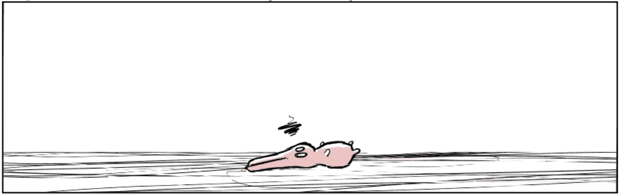
$$\begin{vmatrix} 13-\lambda & \lambda-9 & -2 \\ 4 & 9-\lambda & -2 \\ -2 & 0 & 10-\lambda \end{vmatrix} \xrightarrow{R2' = R2 + R1} =$$

$$\begin{vmatrix} 13-\lambda & \boxed{\begin{matrix}\lambda-9 \\ 0 \\ 0\end{matrix}} & \begin{matrix}-2 \\ -4 \\ 10-\lambda\end{matrix} \\ \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 13-\lambda & \lambda-9 & -2 \\ 17-\lambda & 0 & -4 \\ -2 & 0 & 10-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-9)\Big[..\lambda^2 + ..\lambda + ..\Big]$$

Zo voorkom je 3e graads vergelijking in λ.

Bunny bunny.frozenreality.co.uk 14 Mar 05



"Over all, the Bunny had had quite enough"