Lineaire Algebra en Vector Analyse

6. Matrixtransformaties en lineariteit

Hanneke Paulssen

Universiteit Utrecht

Samenvatting

- Toepassing inverse matrix
- Rotatiematrix
- Lineariteit
- Matrix: Lineaire transformatie
- Orthogonale matrix
- Lineaire (on)afhankelijkheid vectoren

Toepassing inverse matrix

Stel A is inverteerbare matrix en $\mathsf{A}\vec{r} = \vec{k}$.

$\vec{r}$: onbekenden $\quad$ $\vec{k}$: metingen

Linksvermenigvuldiging met A^{-1}:

$\mathsf{A}^{-1}\mathsf{A}\vec{r} = \mathsf{A}^{-1}\vec{k}$

$\mathrm{I}\vec{r} = \mathsf{A}^{-1}\vec{k}$ $\quad$ met I eenheidsmatrix

$\vec{r} = \mathsf{A}^{-1}\vec{k}$

Methode handig als $\vec{r}$ vaak berekend moet worden voor $\mathsf{A}\vec{r} = \vec{k}$ met dezelfde A maar verschillende $\vec{k}$.

Toepassing inverse matrix, voorbeeld

Voorbeeld

$2x + 3y = -1$
5x + 4y = 8

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

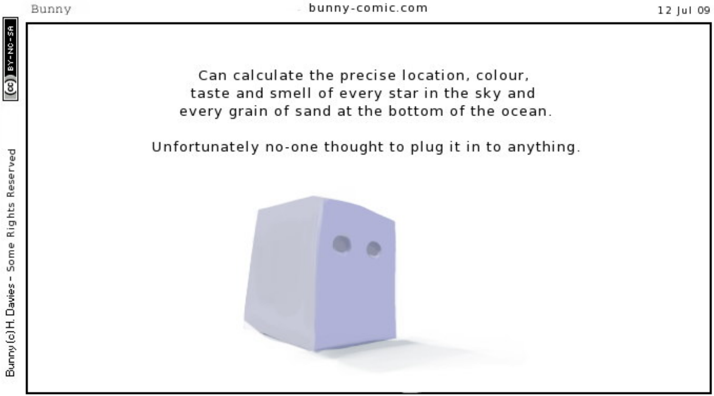
Van vorm $\mathsf{A}\vec{r} = \vec{k} \quad \Rightarrow \quad \vec{r} = \mathsf{A}^{-1}\vec{k}$

$$\mathsf{A}^{-1} = \frac{1}{\det A}\mathsf{C}^{\mathsf{T}} = \frac{1}{8-15}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r} = \mathsf{A}^{-1}\vec{k}$$

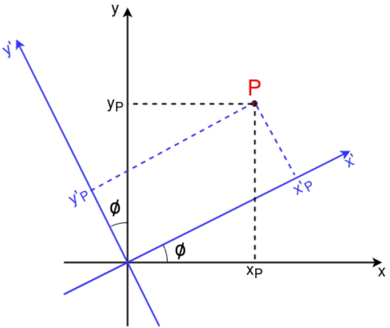
$$\vec{r} = -\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 8 \end{pmatrix} = -\frac{1}{7}\begin{pmatrix} -4-24 \\ 5+16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Andere $\vec{k}$? Snel antwoord!


Bunny
bunny-comic.com
12 Jul 09
BY-NC-SA
Bunny (c) H. Davies - Some Rights Reserved
Can calculate the precise location, colour,
taste and smell of every star in the sky and
every grain of sand at the bottom of the ocean.
Unfortunately no-one thought to plug it in to anything.

Rotatiematrix: 2D assenrotatie

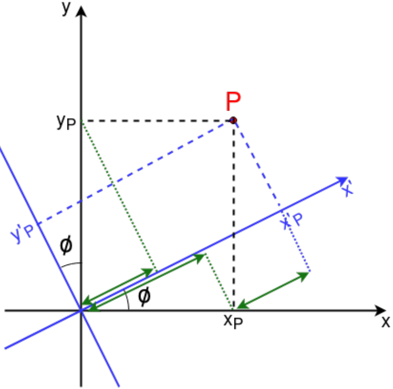
Assenrotatie over hoek ϕ (linksom, tegen wijzers klok)



Gegeven de coördinaten van punt P (x_P, y_P) in het oorspronkelijke x-y assenstelsel.
Wat zijn de coördinaten van punt P (x'_P, y'_P) in het geroteerde x'-y' assenstelsel?

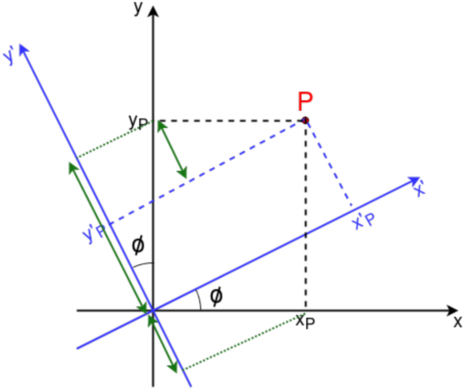
Rotatiematrix: 2D assenrotatie

$$x'_P = x_P \cos\phi + y_P \sin\phi$$



Rotatiematrix: 2D assenrotatie

$$y'_P = -x_P \sin\phi + y_P \cos\phi$$



Rotatiematrix: 2D assenrotatie

Voor punt P (x_P, y_P):

$$x'_P = \ \ x_P \cos\phi + y_P \sin\phi$$
$$y'_P = -x_P \sin\phi + y_P \cos\phi$$

Voor een willekeurig punt (x, y):

$$x' = \ \ x\cos\phi + y\sin\phi$$
$$y' = -x\sin\phi + y\cos\phi$$

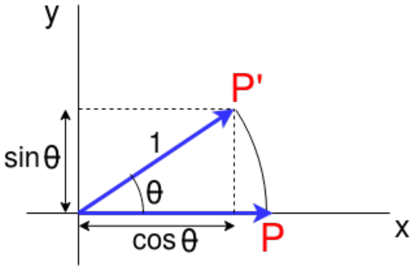
De coördinaten (x', y') in het geroteerde stelsel krijg je door vermenigvuldiging van de plaatsvector met rotatiematrix M_1:

$\mathrm{M}_1\vec{r} = \vec{k}$ met

$$\mathrm{M}_1 = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \vec{k} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

Rotatiematrix: 2D vectorrotatie

Vectorrotatie (puntenrotatie) over hoek θ

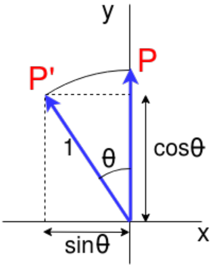


$$\vec{P} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \overset{\text{rotatie}}{\rightarrow} \vec{P}' = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \overset{\text{rotatie}}{\rightarrow} \begin{pmatrix} x\cos\theta \\ x\sin\theta \end{pmatrix}$$

Rotatiematrix: 2D vectorrotatie

Vectorrotatie (puntenrotatie) over hoek θ



$$\vec{P} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \overset{\text{rotatie}}{\rightarrow} \vec{P}' = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \overset{\text{rotatie}}{\rightarrow} \begin{pmatrix} -y\sin\theta \\ y\cos\theta \end{pmatrix}$$

Rotatiematrix: 2D vectorrotatie

Vectorrotatie (puntenrotatie) over hoek θ

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{rotatie}}$$

$$\vec{P'} = \begin{pmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

De coördinaten (x', y') van het geroteerde punt krijg je door vermenigvuldiging van de plaatsvector met rotatiematrix M_2:

$\mathrm{M}_2\vec{r} = \vec{k}$ met

$$\mathrm{M}_2 = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \vec{k} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

Vector- en assenrotatie

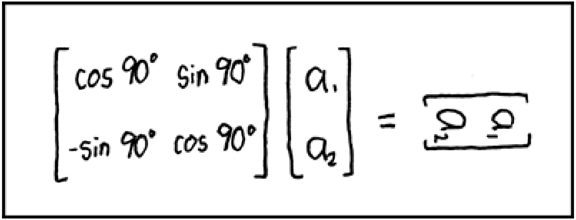
Assenrotatie over ϕ: $\mathsf{M}_1(\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$

Vectorrotatie over θ: $\mathsf{M}_2(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

$\mathsf{M}_2(\theta)$ is rotatie van punten over hoek θ (linksom),
maar ook rotatie van assenstelsel over hoek $-\theta$ (rechtsom).
Immers:

$$\mathsf{M}_2(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \cos(-\theta) & \sin(-\theta) \\ -\sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix} = \mathsf{M}_1(-\theta)$$


cos 90° sin 90°
-sin 90° cos 90°
a1
a2
=

Lineariteit

Een functie $f(x)$ is lineair als

- $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$
- $f(ax) = af(x)$

Voorbeeld: $f(x) = 2x$

- $f(x_1 + x_2) = 2(x_1 + x_2) = 2x_1 + 2x_2 = f(x_1) + f(x_2)$
- $f(ax) = 2\,ax = a\,2x = af(x)$

  $\Rightarrow f(x)$ is lineair

Voorbeeld: $f(x) = 2x + 6$

- $f(x_1 + x_2) = 2(x_1 + x_2) + 6 = 2x_1 + 2x_2 + 6 \neq f(x_1) + f(x_2)$

  $\Rightarrow f(x)$ is niet lineair

Matrix: lineaire transformatie

$$\begin{array}{l} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}' = \mathrm{M}\vec{r}$$

M transformeert de coördinaten (x, y) naar (x', y').

Ga zelf na:

- $\mathrm{M}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2) = \mathrm{M}\vec{r}_1 + \mathrm{M}\vec{r}_2$
- $\mathrm{M}(a\vec{r}) = a\,\mathrm{M}\vec{r}$

  $\Rightarrow$ M is een lineaire coördinatentransformatie

Algemeen
Een lineaire transformatie wordt weergegegeven door een matrix

Suggestie Bekijk videoanimaties (Essence linear algebra, 3Blue1Brown) voor beter inzicht coördinatentransformaties

Transformatie: interpretatie 1

- Coördinatensysteem is vast
- Elk punt verplaatst

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \overset{\mathrm{M}}{\rightarrow} \quad \vec{P'} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$\vec{P} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} \quad \overset{\mathrm{M}}{\rightarrow} \quad \vec{P'} = x'\hat{\imath} + y'\hat{\jmath}$$

Voorbeeld

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \vec{r'} = \mathrm{M}\vec{r} \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$x' = \frac{1}{2}x$
$y' = 2y$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \overset{\mathrm{M}}{\rightarrow} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \overset{\mathrm{M}}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Transformatie: interpretatie 2

- Coördinatensysteem verandert
- Elk punt blijft op z'n plaats

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{(\hat{\imath},\hat{\jmath})} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} \qquad \vec{P}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}_{(\hat{\imath}',\hat{\jmath}')} = x'\hat{\imath}' + y'\hat{\jmath}'$$

$\vec{P} = \vec{P}'$ ($\vec{P}$ en $\vec{P}'$: zelfde punt in twee coördinatensystemen)

$x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} = x'\hat{\imath}' + y'\hat{\jmath}'$

Transformatie: interpretatie 2

Voorbeeld

Stel $\hat{\imath}' = 2\hat{\imath} \qquad (\text{of } \hat{\imath} = \frac{1}{2}\hat{\imath}')$

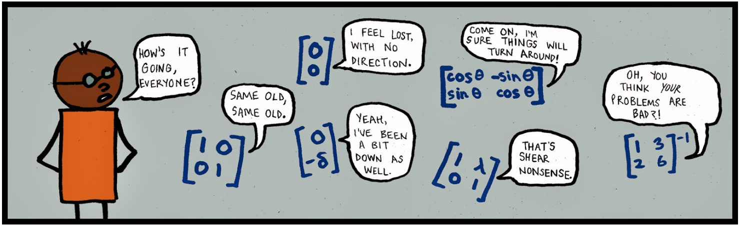
$\hat{\jmath}' = \frac{1}{2}\hat{\jmath} \qquad (\text{of } \hat{\jmath} = 2\hat{\jmath}')$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{(\hat{\imath},\hat{\jmath})} = 1\hat{\imath} + 0\hat{\jmath} = \tfrac{1}{2}\hat{\imath}' + 0\hat{\jmath}' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}_{(\hat{\imath}',\hat{\jmath}')} \qquad \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}_{(\hat{\imath},\hat{\jmath})} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x \\ 0 \end{pmatrix}_{(\hat{\imath}',\hat{\jmath}')}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{(\hat{\imath},\hat{\jmath})} = 0\hat{\imath} + 1\hat{\jmath} = 0\hat{\imath}' + 2\hat{\jmath}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}_{(\hat{\imath}',\hat{\jmath}')} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}_{(\hat{\imath},\hat{\jmath})} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2y \end{pmatrix}_{(\hat{\imath}',\hat{\jmath}')}$$

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{(\hat{\imath},\hat{\jmath})} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x \\ 2y \end{pmatrix}_{(\hat{\imath}',\hat{\jmath}')} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}_{(\hat{\imath}',\hat{\jmath}')}$$

Ofwel: $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ (Ga na.)


HOW'S IT GOING, EVERYONE?
SAME OLD, SAME OLD.
I FEEL LOST, WITH NO DIRECTION.
YEAH, I'VE BEEN A BIT DOWN AS WELL.
COME ON, I'M SURE THINGS WILL TURN AROUND!
THAT'S SHEAR NONSENSE.
OH, YOU THINK YOUR PROBLEMS ARE BAD?!

Orthogonale transformatie

Bij orthogonale transformatie blijft lengte van vector behouden.

Orthogonale matrix is vierkante matrix waarvan rijen/kolommen orthogonale eenheidsvectoren zijn.

A is orthogonale matrix als $\boxed{A^{T} = A^{-1}}$

Als A orthogonale matrix, dan $\det A = \pm 1$

Bewijs:
- $\det(AA^{T}) = \det A \ \det A^{T} = \det A \ \det A = (\det A)^2$
- Als A orthogonaal: $\det(AA^{T}) = \det(AA^{-1}) = \det \mathrm{I} = 1$

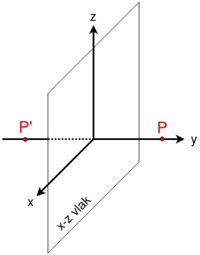
$\Rightarrow \ (\det A)^2 = 1 \ \Rightarrow \ \det A = \pm 1$

Let op:
Als $\det A = \pm 1$, dan A orthogonale matrix is NIET waar
(boek is verwarrend)

Voorbeelden orthogonale transformaties

- Rotatiematrix is orthogonale matrix met determinant 1.
  Voorbeeld
  $$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{Assenrotatie over hoek } \theta$$
- Spiegeling waarbij één coördinaat van teken verandert is transformatie met determinant -1.
  Voorbeeld
  $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \\ z \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Spiegeling in x-z vlak




BLOODY MARY,
BLOODY MARY,
BLOODY MARY.
RAAGHHHHHH

Lineaire (on)afhankelijke vectoren

Twee vectoren $\vec{A}$ en $\vec{B}$ zijn

- lineair onafhankelijk als
  - ze samen een vlak opspannen, d.w.z.
  - $\alpha\vec{A} + \beta\vec{B} = \vec{0}$ alleen voor $\alpha, \beta = 0$
- lineair afhankelijk als
  - ze samen geen vlak opspannen, d.w.z.
  - $\alpha\vec{A} + \beta\vec{B} = \vec{0}$ voor zekere $\alpha, \beta \neq 0$

Bepaling aantal onafhankelijke vectoren

Voorbeeld

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Hoeveel onafhankelijke vectoren?

Schrijf vectoren als rijen in matrixnotatie en voer rijreductie uit.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \underset{\rightarrow}{\vec{v}_2' = \vec{v}_2 - \vec{v}_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \underset{\rightarrow}{\vec{v}_3' = \vec{v}_3 - 2\vec{v}_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \vec{v}_3' = \vec{v}_3 - \vec{v}_2 \\ \rightarrow \\ \vec{v}_4' = \vec{v}_4 + \vec{v}_2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De 4 vectoren zijn onderling gecombineerd. Twee vectoren $\neq \vec{0} \Rightarrow 2$ onafhankelijke vectoren. Twee van de oorspronkelijke vectoren kunnen worden geschreven als lineaire combinatie van de overige twee.

Bijv.: $\vec{v}_3 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ en $\vec{v}_4 = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$
Of: $\vec{v}_1 = \vec{v}_2 + \vec{v}_4$ en $\vec{v}_3 = 2\vec{v}_2 + \vec{v}_4$

Another productive day!