Lineaire Algebra en Vector Analyse

5. Matrixrekening

Hanneke Paulssen

Universiteit Utrecht

Samenvatting

- Matrixrekening: sommatie, vermenigvuldiging
- Matrixvermenigvuldiging met indexnotatie
- Getransponeerde matrix
- Nulmatrix
- Eenheidsmatrix
- Inverse matrix, berekening (inverteerbaar en singulier)

Matrixvergelijking, vermenigvuldiging constante, sommatie

Matrix vergelijking

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow a_{11} = 1,\ a_{12} = 2, \text{ etc.}$$

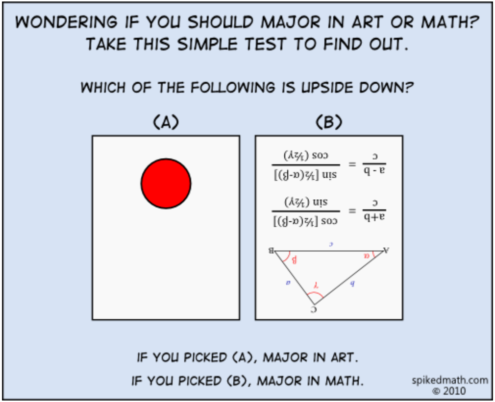
$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{FOUT!}$$

Matrixvermenigvuldiging met constante

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow 2A = \begin{pmatrix} 2a_{11} & 2a_{12} \\ 2a_{21} & 2a_{22} \end{pmatrix}$$

Matrixsommatie

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix}$$


WONDERING IF YOU SHOULD MAJOR IN ART OR MATH?
TAKE THIS SIMPLE TEST TO FIND OUT.
WHICH OF THE FOLLOWING IS UPSIDE DOWN?
(A)
(B)
IF YOU PICKED (A), MAJOR IN ART.
IF YOU PICKED (B), MAJOR IN MATH.
spikedmath.com
© 2010

Matrixvermenigvuldiging voor lineaire vergelijkingen

Voorbeeld

$x + \ \ y = 1$
$\mathrm{x} + 2\mathrm{y} = 1.5$

$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ coëfficiëntenmatrix

$\vec{k} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1.5 \end{pmatrix}$ r.h.s.

Onbekenden, x en y, in vectorvorm: $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\mathrm{A}\vec{r} = \vec{k}$ is vergelijking in matrixvorm

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1.5 \end{pmatrix}$$

Matrixvermenigvuldiging voor lineaire vergelijkingen

1e vergelijking van $A\vec{r} = \vec{k}$:

$$\begin{pmatrix} \boxed{1 \quad 1} \\ 1 \quad 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{1} \\ 1.5 \end{pmatrix}$$

(1e rij, 1e element A $\times$ 1e element $\vec{r}$) +
(1e rij, 2e element A $\times$ 2e element $\vec{r}$) = 1e element $\vec{k}$

2e vergelijking van $A\vec{r} = \vec{k}$:

$$\begin{pmatrix} 1 \quad 1 \\ \boxed{1 \quad 2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \boxed{1.5} \end{pmatrix}$$

(2e rij, 1e element A $\times$ 1e element $\vec{r}$) +
(2e rij, 2e element A $\times$ 2e element $\vec{r}$) = 2e element $\vec{k}$

Matrixvermenigvuldiging voor lineaire vergelijkingen

Met $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \vec{k} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$

worden de vergelijkingen van $\mathrm{A}\vec{x} = \vec{k}$

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= k_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= k_2 \end{aligned}$$

- kolom-index van a is rij-index van x
  $\Rightarrow$ aantal kolommen van A = aantal rijen van $\vec{x}$

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= k_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= k_2 \end{aligned}$$

- rij-index van a is rij-index van k
  $\Rightarrow$ aantal rijen van A = aantal rijen van $\vec{k}$
- $\vec{x}$ is vector (1 kolom) en $\vec{k}$ is vector (1 kolom)
  $\Rightarrow$ aantal kolommen van $\vec{x}$ = aantal kolommen van $\vec{k}$

$$\begin{array}{cccc} \mathrm{A} & \vec{x} & = & \vec{k} \\ (2 \times 2) & (2 \times 1) & = & (2 \times 1) \end{array}$$

Matrixvermenigvuldiging voor lineaire vergelijkingen

2 vergelijkingen 3 onbekenden

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$$

$$(2 \times 3) \qquad (3 \times 1) \qquad (2 \times 1)$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = k_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = k_2$$

1e vergelijking: $\sum_{j=1}^{3} a_{1j}x_j = k_1$

2e vergelijking: $\sum_{j=1}^{3} a_{2j}x_j = k_2$

Vergelijking 1 en 2: $\sum_{j=1}^{3} a_{ij}x_j = k_i \qquad$ voor $\quad i = 1, 2$

Sommatieteken Σ

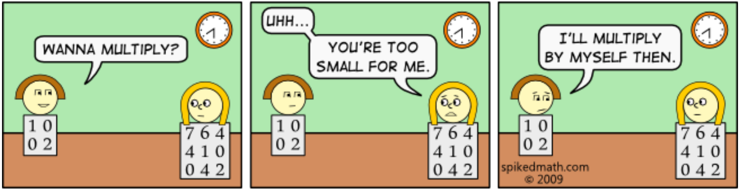
$$\sum_{i=1}^{3} a_i = a_1 + a_2 + a_3 = \sum_{p=1}^{3} a_p$$

$$\sum_{j=1}^{3} a_{1j} = a_{11} + a_{12} + a_{13}$$

$$\sum_{j=1}^{3} a_{ij} = a_{i1} + a_{i2} + a_{i3}$$

$$\sum_{j=1}^{3} a_{ij}x_j = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 = \sum_{q=1}^{3} a_{iq}x_q$$

j (of q) is dummy index: maakt niet uit welke letter gebruikt wordt


WANNA MULTIPLY?
1 0
0 2
7 6 4
4 1 0
0 4 2
UHH...
YOU'RE TOO SMALL FOR ME.
I'LL MULTIPLY BY MYSELF THEN.
spikedmath.com
© 2009

Vermenigvuldiging van twee (2×2) matrices

$$\begin{array}{cccc} A & B & = & C \\ (2\times 2) & (2\times 2) & = & (2\times 2) \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}$

c_{11}: elementen 1e rij van A en 1e kolom van B

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

$c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22}$

c_{12}: elementen 1e rij van A en 2e kolom van B

Vermenigvuldiging van twee (2×2) matrices

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \boxed{a_{21} \quad a_{22}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} b_{11} \\ b_{21} \end{matrix}} & \begin{matrix} b_{12} \\ b_{22} \end{matrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ \boxed{c_{21}} & c_{22} \end{pmatrix}$$

$c_{21} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21}$

c_{21}: elementen 2e rij van A en 1e kolom van B

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \boxed{a_{21} \quad a_{22}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{matrix} b_{11} \\ b_{21} \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} b_{12} \\ b_{22} \end{matrix}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & \boxed{c_{22}} \end{pmatrix}$$

$c_{22} = a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}$

c_{22}: elementen 2e rij van A, 2e kolom van B

$$C = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

Vermenigvuldiging van (2×3) matrix met (3×2) matrix

$(2 \times 3)(3 \times 2) = (2 \times 2)$

$$\begin{pmatrix} \boxed{a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13}} \\ a_{21} \quad a_{22} \quad a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \boxed{c_{12}} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

$c_{12} = a_{11} b_{12} + a_{12} b_{22} + a_{13} b_{32}$

$c_{1j} = a_{11} b_{1j} + a_{12} b_{2j} + a_{13} b_{3j}$ voor $j = 1, 2$

$c_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + a_{i3} b_{3j}$ voor $i, j = 1, 2$

$$\boxed{c_{ij} = \sum_{k=1}^{3} a_{ik} b_{kj}} \qquad \text{voor} \quad i, j = 1, 2$$


Algebra is weightlifting for the Brain!
Mat Moore, 2008

Regels matrixvermenigvuldiging

Is matrixvermenigvuldiging commutatief, d.w.z. geldt $AB = BA$?

Voorbeeld

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+3 & 1+1 \\ 2+6 & 1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+1 & 2+2 \\ 3+1 & 3+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Eén voorbeeld met $AB \neq BA \quad \Rightarrow$

Algemeen: $AB \neq BA$, matrixvermenigvuldiging niet commutatief.

Slechts één voorbeeld is voldoende om aan te tonen dat een bewering niet waar is.

Bewijs dat een bewering waar is moet in z'n algemeenheid aangetoond worden (niet met voorbeelden maar bijv. indexnotatie).

Vermenigvuldigingsregels matrices en determinanten

- $A(BC) = (AB)C$ matrixvermenigvuldiging is associatief.
- $A(B + C) = AB + AC$
- $(B + C)A = BA + CA$

Matrices kunnen alleen vermenigvuldigd worden als het aantal kolommen van de eerste matrix gelijk is aan het aantal rijen van de tweede matrix: $(n \times m)(m \times p) = (n \times p)$

Voor determinanten geldt

- $$\begin{aligned} \det(AB) &= \det A \ \det B \\ &= \det B \ \det A \\ &= \det(BA) \end{aligned}$$

Let op: $\det(A + B) \neq \det A + \det B$

Getransponeerde matrix, nulmatrix

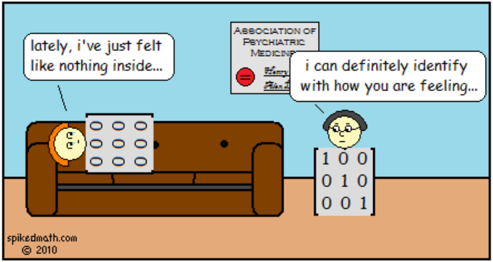
Getransponeerde van matrix A is A^T: rijen en kolommen worden verwisseld.

Voorbeeld: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ $\qquad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

$$\boxed{(a_{ij})^T = a_{ji}}$$

Nulmatrix (zero matrix): matrix met alle elementen 0.

Voorbeeld: $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$


lately, i've just felt like nothing inside...
i can definitely identify with how you are feeling...
ASSOCIATION OF PSYCHIATRIC MEDICINE
1 0 0
0 1 0
0 0 1
spikedmath.com
© 2010

Eenheidsmatrix

Eenheidsmatrix, identiteitsmatrix (unit matrix, identity matrix): vierkante matrix met 1-en op hoofddiagonaal, overige elementen zijn 0.

Symbool: I, U, of E

Voorbeeld: $\mathrm{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ga zelf na:
$\mathrm{AI} = \mathrm{A}$ en $\mathrm{IA} = \mathrm{A}$

Inverse van matrix

Inverse van A is A^{-1} zodanig dat $\mathsf{A}\mathsf{A}^{-1} = \mathrm{I}$ en $\mathsf{A}^{-1}\mathsf{A} = \mathrm{I}$.

Alleen vierkante matrix met determinant $\neq 0$ heeft inverse.
Bewijs:
$\det \mathsf{A}\ \det \mathsf{A}^{-1} = \det \mathsf{A}\mathsf{A}^{-1} = \det \mathrm{I} = 1 \ \Rightarrow\ \det \mathsf{A} \neq 0$ en $\det \mathsf{A}^{-1} \neq 0$.

A is inverteerbaar als A^{-1} bestaat.

A is singulier als A^{-1} niet bestaat.

Berekening inverse matrix

Inverse van A: $\boxed{\mathrm{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathrm{A}} \mathrm{C}^T}$

C: matrix van cofactoren C_{ij}

C_{ij} is element op rij i en kolom j van matrix C
cofactor $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ met M_{ij} minor/onderdeterminant

C^T: getransponeerde van C

Bepaling inverse van (2×2) matrix

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathrm{A}} \mathrm{C}^T = \frac{1}{\det \mathrm{A}} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}^T$$

$$\det \mathrm{A} = ae - bd$$

$$\begin{aligned} C_{11} &= +e \\ C_{12} &= -d \\ C_{21} &= -b \\ C_{22} &= +a \end{aligned} \;\Rightarrow\; \mathrm{C} = \begin{pmatrix} e & -d \\ -b & a \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \mathrm{C}^T = \begin{pmatrix} e & -b \\ -d & a \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{A}^{-1} = \frac{1}{ae - bd} \begin{pmatrix} e & -b \\ -d & a \end{pmatrix}$$

Voor inverse van (3×3) matrix: zie boek.

Belang inverse matrix

Matrixdeling bestaat niet.

Als $AB = C$, dan is $B = \dfrac{C}{A}$ ongedefinieerd (fout!).

Immers: onduidelijk of CA^{-1} of $A^{-1}C$ bedoeld wordt.

Linksvermenigvuldiging van $AB = C$ met A^{-1}:

$A^{-1}AB = A^{-1}C$

$\mathrm{I}B = A^{-1}C$

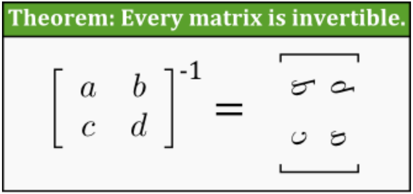
$B = A^{-1}C$

Rechtsvermenigvuldiging van $AB = C$ met B^{-1}:

$ABB^{-1} = CB^{-1}$

$A\mathrm{I} = CB^{-1}$

$A = CB^{-1}$



Thank You

see u next class