Lineaire Algebra en Vector Analyse

4. Lijnen en vlakken

Hanneke Paulssen

Universiteit Utrecht

Samenvatting

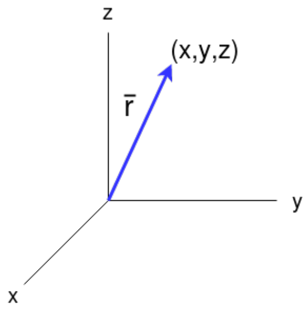
- Punt
- Lijn (twee representaties)
- Vlak
- Toepassingen vectorrekening op lijnen en vlakken

Punt

Punt

gegeven door coördinaten (x, y, z)

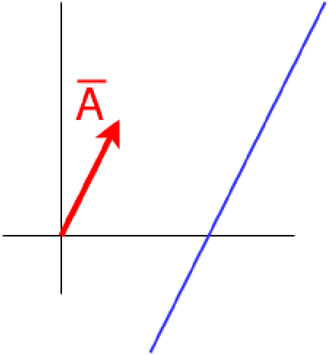
of plaatsvector $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$



Lijn

Lijn

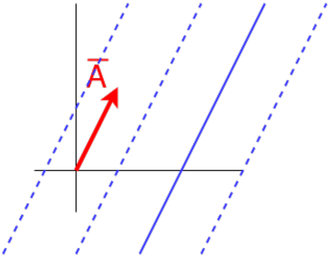
- heeft richting $\vec{A} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$



Lijn

Lijn

- heeft richting $\vec{A} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$



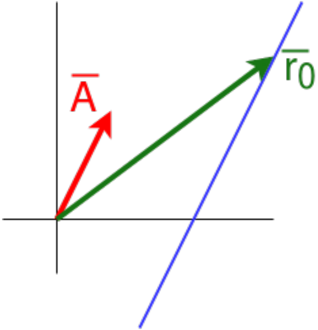
Maar: meer lijnen met zelfde richting

Lijn

Lijn

- heeft richting $\vec{A} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$
- gaat door punt

  $\vec{r}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$

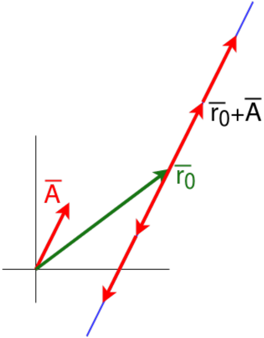


Lijn

Lijn

- heeft richting $\vec{A} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$
- gaat door punt

  $\vec{r}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$



$\vec{r}_0$ is punt van lijn, maar ook:
$\vec{r}_0 + \vec{A}$, $\vec{r}_0 + 2\vec{A}$, $\vec{r}_0 - \vec{A}$, $\vec{r}_0 - 2\vec{A}$, $\vec{r}_0 + 1.3\vec{A}$, $\vec{r}_0 - 2.35\vec{A}$, ...

Punt $\vec{r}$ van lijn $\boxed{\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{A}t}$

Vectorvoorstelling of parametrische vorm van lijn

$\vec{r}_0$: steunvector $\vec{A}$: richtingsvector

Lijn

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{A}t$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} t \qquad \begin{aligned} x &= x_0 + A_x t \\ y &= y_0 + A_y t \\ z &= z_0 + A_z t \end{aligned}$$

$$t = \boxed{\frac{x - x_0}{A_x} = \frac{y - y_0}{A_y} = \frac{z - z_0}{A_z}}$$

Symmetrische vergelijkingen van lijn

Als $A_y = 0$, dan $y = y_0$ en $\dfrac{x - x_0}{A_x} = \dfrac{z - z_0}{A_z}$

Algemeen

Lijn: 2 vergelijkingen, 3 onbekenden/variabelen

Bunny bunny.frozenreality.co.uk 20 Apr 06

"They were just words and shapes"

Lijn, voorbeeld

Lijn gegeven door $y = 7$ en $x = z - 6$.
Gevraagd: Schrijf in parametrische vorm $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{A}t$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} t$$

$$y = y_0 + A_y t = 7 \quad \Rightarrow \qquad y_0{=}7,\ A_y{=}0$$

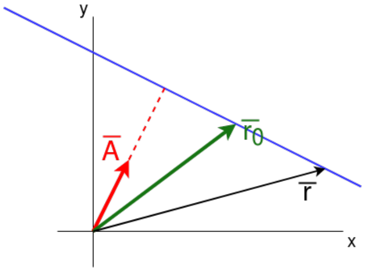
$$x = z - 6 \ \text{ en } \ \frac{x - x_0}{A_x} = \frac{z - z_0}{A_z} \ \Rightarrow \ A_x{=}1,\ x_0{=}0,\ A_z{=}1,\ z_0{=}6$$

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} t \quad \text{maar ook} \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} t$$

$$\text{of } \vec{r} = \begin{pmatrix} 0+1 \\ 7+0 \\ 6+1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} t \ = \ \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} t$$

Lijn, toepassing

Vind lijn door punt $\vec{r}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ loodrecht op $\vec{A} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix}$.



$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ punt van de lijn

$\Rightarrow \vec{r} - \vec{r}_0$ geeft richting lijn

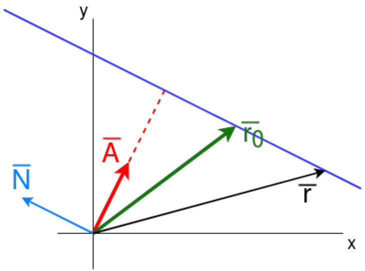
$\Rightarrow (\vec{r} - \vec{r}_0) \perp \vec{A}$

$\Rightarrow (\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{A} = 0$

$\Rightarrow (x - x_0)A_x + (y - y_0)A_y = 0$

$$\Rightarrow \frac{x - x_0}{A_y} = -\frac{y - y_0}{A_x}$$

Lijn, toepassing



Anders:

$\vec{N}$ is richtingsvector van lijn

$\vec{r} = \vec{r_0} + \vec{N}t$

$\vec{N} \perp \vec{A} \Rightarrow \vec{A} \cdot \vec{N} = 0$

Met $\vec{N} = \begin{pmatrix} N_x \\ N_y \end{pmatrix}$:

$A_x N_x + A_y N_y = 0$

Bijv.: $N_x = -A_y$ en $N_y = A_x \Rightarrow \vec{r} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -A_y \\ A_x \end{pmatrix} t$

Of: $\vec{r} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_y \\ -A_x \end{pmatrix} t$

Of: $\vec{r} = \begin{pmatrix} x_0 - A_y \\ y_0 + Ax \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_y \\ -A_x \end{pmatrix} t$


I LOVE KITES.
HEY, ME TOO!
I'LL GO GET MINE ONCE I FINISH WALKING MY DOG!
C'MON, BOY!
ARF
ARF
ARF

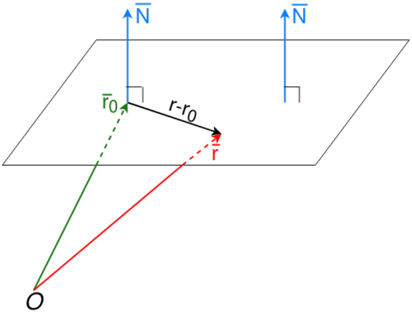
Vlak
Vlak

- orientatie gegeven door *normaal*

$$\vec{N} = \begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ N_z \end{pmatrix}$$

- gaat door punt

$$\vec{r}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$



$\vec{r}$ met coördinaten (x, y, z) punt van het vlak

$\vec{r} - \vec{r}_0$: richting parallel aan vlak $\quad \Rightarrow \quad (\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{N} = 0$

Vlak $\boxed{(x - x_0)N_x + (y - y_0)N_y + (z - z_0)N_z = 0}$

of $\boxed{N_x x + N_y y + N_z z = N_x x_0 + N_y y_0 + N_z z_0}$

Vlak

$$N_x x + N_y y + N_z z = N_x x_0 + N_y y_0 + N_z z_0$$

van vorm $\quad ax + by + cz = d$

met $\quad \vec{N} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ normaalvector van vlak

en $\quad d = \vec{N} \cdot \vec{r}_0 \quad$ legt de locatie vast

Algemeen

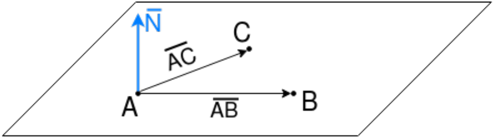
Vlak: 1 vergelijking met 3 onbekenden/variabelen

Dus $x - 2y + 2z = 5$ representeert een vlak!

Normaalvector is bijv.: $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ of $\frac{1}{\sqrt{1+4+4}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Vlak door 3 punten

Bepaal vlak door 3 punten A, B en C.



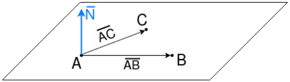
Vlak opgespannen door 2 vectoren met verschillende richtingen.

$\overrightarrow{AB}$ en $\overrightarrow{AC}$ parallel aan vlak ('in vlak').

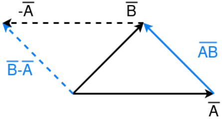
$\vec{N}$ loodrecht op $\overrightarrow{AB}$ en $\overrightarrow{AC}$.

Gebruik $\vec{N}$ en een punt van het vlak om vlak te bepalen.

Vlak door 3 punten, voorbeeld



$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{B} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{C} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$



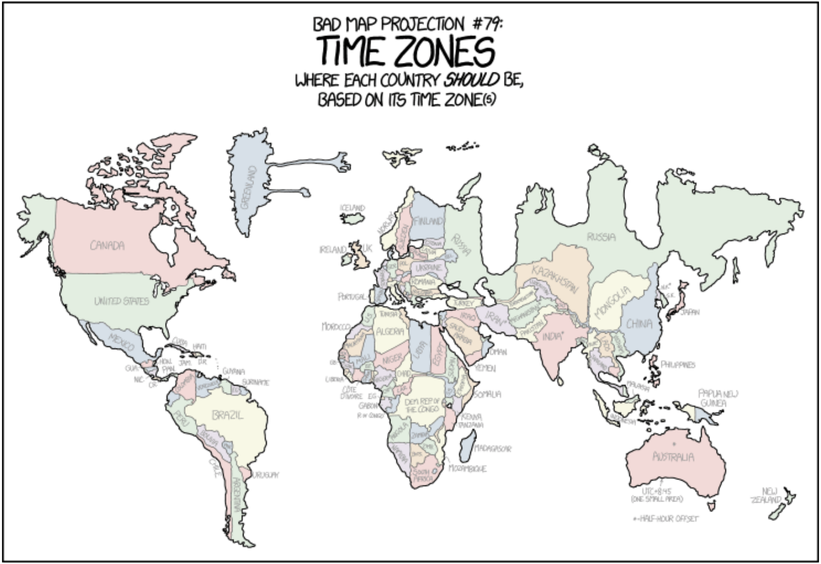
$$\overrightarrow{AB} = \vec{B} - \vec{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{N} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \hat{\imath}(0) - \hat{\jmath}(0) + \hat{k}(-2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Kies voor $\vec{r}_0$ bijv. $\vec{A}$

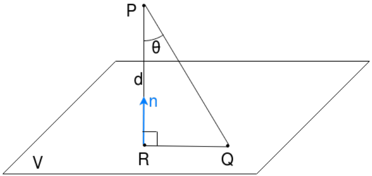
$(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{N} = 0$ geeft dan $\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$

$(z-1)(-2) = 0 \;\Rightarrow\; z = 1$ Is dit een vlak? Ja.


BAD MAP PROJECTION #79:
TIME ZONES
WHERE EACH COUNTRY SHOULD BE,
BASED ON ITS TIME ZONE(S)
GREENLAND
ICELAND
CANADA
UNITED STATES
MEXICO
CUBA
HAITI
GUYANA
SURINAME
BRAZIL
PERU
BOLIVIA
CHILE
ARGENTINA
URUGUAY
IRELAND
UK
NORWAY
FINLAND
RUSSIA
UKRAINE
ROMANIA
PORTUGAL
TURKEY
MOROCCO
ALGERIA
LIBYA
EGYPT
NIGER
CHAD
SUDAN
IRAQ
IRAN*
SAUDI ARABIA
OMAN
YEMEN
SOMALIA
KENYA
TANZANIA
MADAGASCAR
MOZAMBIQUE
SOUTH AFRICA
ANGOLA
GABON
DEM REP OF THE CONGO
CÔTE D'IVOIRE
KAZAKHSTAN
MONGOLIA
CHINA
INDIA*
JAPAN
PHILIPPINES
MALAYSIA
PAPUA NEW GUINEA
AUSTRALIA
UTC+8:45
(ONE SMALL AREA)
NEW ZEALAND
*=HALF-HOUR OFFSET

Afstand punt tot vlak

Bereken afstand tussen punt P en vlak V.



Afstand $d = |\overrightarrow{PR}|$

Q willekeurig punt op vlak

θ hoek tussen $\overrightarrow{PR}$ en $\overrightarrow{PQ}$

$\hat{n}$ normaalvector V (lengte 1)

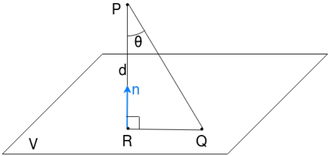
$$\begin{aligned} d = |\overrightarrow{PR}| &= |\overrightarrow{PQ}| \cos\theta \\ &= |\overrightarrow{PQ}||\hat{n}| \cos\theta \\ &= \overrightarrow{PQ} \cdot \hat{n} \end{aligned}$$

Als $\overrightarrow{PQ} \cdot \hat{n}$ negatief, neem absolute waarde: $d = |\overrightarrow{PQ} \cdot \hat{n}|$

Afstand punt tot vlak, voorbeeld

Afstand tussen $P = (1,1,1)$ en

V: $x + 2y - 3z = 4$

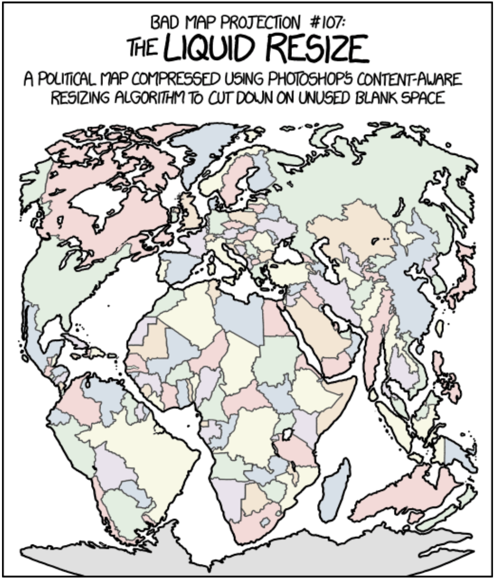


Normaal op V: $\vec{N} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \hat{n} = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

Punt vlak bijv. $\vec{Q} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{PQ} = \vec{Q} - \vec{P} = \begin{pmatrix} 4-1 \\ 0-1 \\ 0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

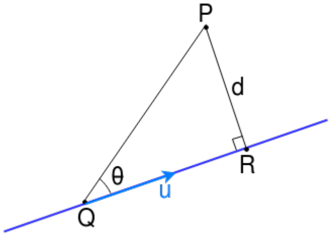
$$d = |\overrightarrow{PR}| = |\overrightarrow{PQ}|\cos\theta = |\overrightarrow{PQ}||\hat{n}|\cos\theta = \overrightarrow{PQ} \cdot \hat{n}$$

$$d = \overrightarrow{PQ} \cdot \hat{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{14}} \\ \frac{2}{\sqrt{14}} \\ -\frac{3}{\sqrt{14}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{14}}(3 - 2 + 3) = \frac{4}{\sqrt{14}}$$


BAD MAP PROJECTION #107:
THE LIQUID RESIZE
A POLITICAL MAP COMPRESSED USING PHOTOSHOP'S CONTENT-AWARE RESIZING ALGORITHM TO CUT DOWN ON UNUSED BLANK SPACE

Afstand punt tot lijn

Bereken afstand tussen punt P en lijn.



Afstand $d = |\overrightarrow{PR}|$

Q willekeurig punt op lijn

θ hoek tussen $\overrightarrow{QP}$ en $\overrightarrow{QR}$

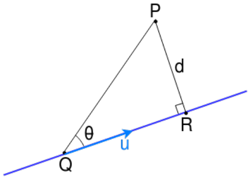
$\hat{u}$ richtingsvector lijn (lengte 1)

$$
\begin{aligned}
d = |\overrightarrow{PR}| &= |\overrightarrow{PQ}| \sin\theta \\
&= |\overrightarrow{PQ}||\hat{u}| \sin\theta \\
&= |\ \overrightarrow{PQ} \times \hat{u}\ |
\end{aligned}
$$

Afstand punt tot lijn, voorbeeld

Afstand tussen $P = (1, 1, 1)$ en

lijn: $\vec{r} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} t$

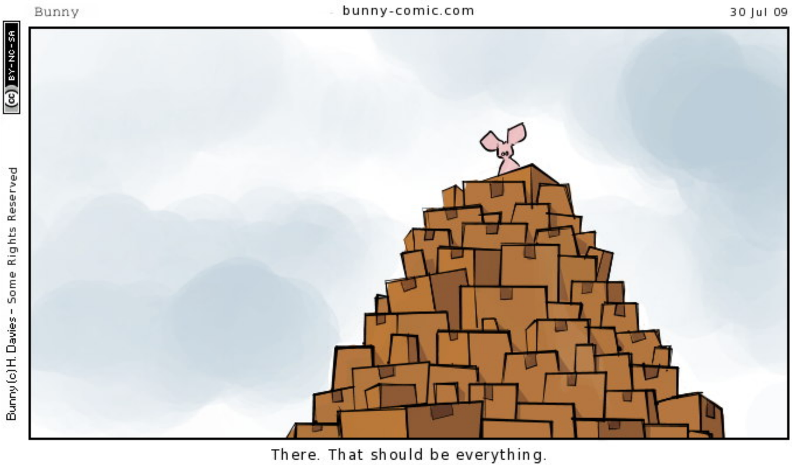


Richtingsvector $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \hat{u} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Punt lijn bijv. $\vec{Q} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{PQ} = \vec{Q} - \vec{P} = \begin{pmatrix} -1-1 \\ 0-1 \\ 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{PQ} \times \hat{u} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}(-\hat{\imath} + 2\hat{\jmath}) = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$d = |\overrightarrow{PQ}| \sin\theta = |\overrightarrow{PQ}||\hat{u}| \sin\theta = |\ \overrightarrow{PQ} \times \hat{u}\ | = \frac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{5} = \sqrt{\frac{5}{6}}$$


Bunny
bunny-comic.com
30 Jul 09
(cc) BY-NC-SA
Bunny (c) H. Davies - Some Rights Reserved
There. That should be everything.