Lineaire Algebra en Vector Analyse

3. Introductie vectorrekening

Hanneke Paulssen

Universiteit Utrecht

Samenvatting

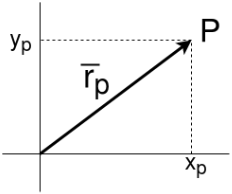
- Vector: norm, sommatie, vermenigvuldiging met constante
- Nulvector
- Eenheidsvectoren
- Inproduct (dot product): twee methoden
- Uitproduct (cross product): twee methoden
- Triple scalar product

Vector

Vector heeft een grootte en richting.

Notatie: $\mathbf{A}$ (boek), of $\vec{A}$ (duidelijk), of $\bar{A}$ (gangbaar schrijfstijl).
Schrijf altijd $^{\rightarrow}$ of $^{-}$ boven het vectorsymbool!

Locatie van vector ligt niet vast,
maar plaatsvector (location vector):
begint in oorsprong (notatie vaak: $\vec{r}$)



$P = (x_p, y_p)$: coördinaten van P

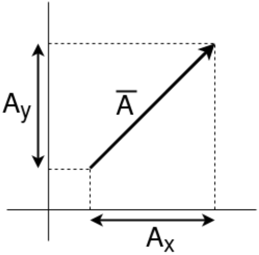
$$\vec{r}_p = \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix}$$

Vector: norm

Norm (lengte) van $\vec{A}$: $|\vec{A}|$

Als $\vec{A} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix}$

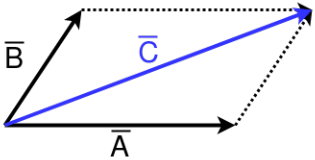
$$|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$$



Vectorsommatie

$\vec{A} + \vec{B} = \vec{C}$

$A_x + B_x = C_x$
$\mathrm{A}_y + B_y = C_y$



$\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$: vectorsommatie is *commutatief*

$(\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} = \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C})$: vectorsommatie is *associatief*

Vermenigvuldiging met scalar, nulvector

Vector vermenigvuldiging met een scalar

$$k\vec{A} = k \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kA_x \\ kA_y \\ kA_z \end{pmatrix}$$

$k\vec{A}$ is k keer zo lang als $\vec{A}$ en heeft zelfde richting als $\vec{A}$ (of omgekeerd als k negatief).

Nulvector (zero vector): vector met alle element gelijk aan 0.

Voorbeeld: $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ of $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Eenheidsvectoren

Eenheidsvector (unit vector): vector met lengte 1.

Voorbeeld: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ of $\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$

Eenheidsvector in richting van $\vec{A}$: $\quad \dfrac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$

Voorbeeld: $\vec{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ met $|\vec{A}| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

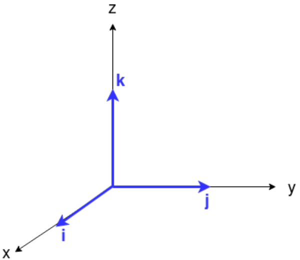
Eenheidsvector in richting van $\vec{A} = \dfrac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \dfrac{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{2}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}$

Eenheidsvectoren, vectornotatie

Eenheidsvectoren worden met een ˆ geschreven.

Voorbeeld: $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ en $\hat{k}$ van een rechtshandig coördinatensysteem

$$\hat{\imath} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \hat{\jmath} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \hat{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



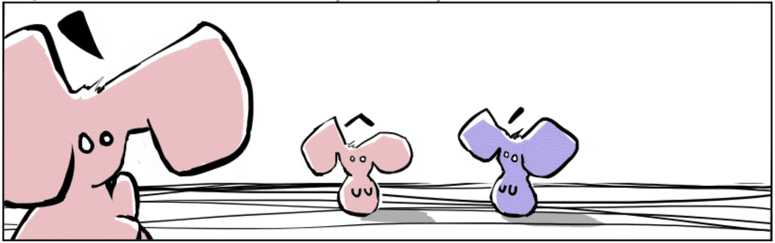
Schrijfwijzen voor vector $\vec{A}$:

$$\boxed{\vec{A} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}}$$

of

$$\boxed{\vec{A} = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k}}$$

Bunny bunny.frozenreality.co.uk 11 Jan 05



"The hats were stylish, yet difficult to pronounce"

Vectorvermenigvuldiging

1. Scalar product, inproduct, dot product:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} \qquad \rightarrow \qquad \text{scalar}$$

2. Vector product, uitproduct, cross product:

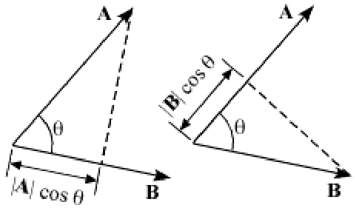
$$\vec{A} \times \vec{B} \qquad \rightarrow \qquad \text{vector}$$

Inproduct (dot product)

Inproduct $\rightarrow$ scalar

$$\boxed{\vec{A}\cdot\vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta}$$

θ is ingesloten hoek



$$\begin{aligned}\vec{A}\cdot\vec{B} &= |\vec{A}|\left(|\vec{B}|\cos\theta\right)\\ &= |\vec{A}|\left(\text{projectie van } \vec{B} \text{ op } \vec{A}\right)\\ &= |\vec{A}|\left(\text{component van } \vec{B} \text{ in richting van } \vec{A}\right)\end{aligned}$$

ofwel

$$\begin{aligned}\vec{A}\cdot\vec{B} &= |\vec{B}|\left(|\vec{A}|\cos\theta\right)\\ &= |\vec{B}|\left(\text{projectie van } \vec{A} \text{ op } \vec{B}\right)\\ &= |\vec{B}|\left(\text{component van } \vec{A} \text{ in richting van } \vec{B}\right)\end{aligned}$$

Regels inproduct (dot product)

$$\boxed{\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}| \cos\theta}$$

- $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$
  Inproduct is *commutatief*
- $\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$
  Inproduct is *distributief*
- $\vec{A} \cdot \vec{A} = |\vec{A}||\vec{A}| \cos 0 = |\vec{A}|^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2$
  Inproduct van vector met zichzelf is kwadraat van norm
- Als $\vec{A} \perp \vec{B}$, dan $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$ (want $\cos 90^\circ = 0$)

Inproduct (dot product)

Met $\quad \hat{\imath}\cdot\hat{\jmath}=0, \quad \hat{\jmath}\cdot\hat{k}=0, \quad \hat{k}\cdot\hat{\imath}=0$

en $\quad \hat{\imath}\cdot\hat{\imath}=1, \quad \hat{\jmath}\cdot\hat{\jmath}=1, \quad \hat{k}\cdot\hat{k}=1$

vinden we

$$\begin{aligned}\vec{A}\cdot\vec{B} &= (A_x\hat{\imath}+A_y\hat{\jmath}+A_z\hat{k})\cdot(B_x\hat{\imath}+B_y\hat{\jmath}+B_z\hat{k}) = \\ &\quad A_xB_x(\hat{\imath}\cdot\hat{\imath})+A_xB_y(\hat{\imath}\cdot\hat{\jmath})+A_xB_z(\hat{\imath}\cdot\hat{k})+A_yB_x(\hat{\jmath}\cdot\hat{\imath})+A_yB_y(\hat{\jmath}\cdot\hat{\jmath})+\ldots \\ &\quad = A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z\end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{A}\cdot\vec{B} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z}$$

Dot product?


Bunny
bunny.frozenreality.co.uk
04 Sept 05
Bunny (c) H. Davies - All Rights Reserved
"The Bunny, at 21:00 Greenwich Mean Time, as viewed from 10,000 feet"

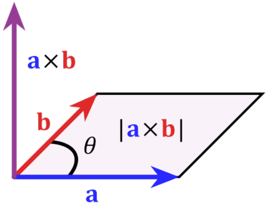
Uitproduct (cross product)

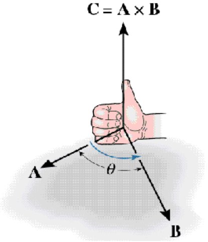
Uitproduct $\rightarrow$ vector

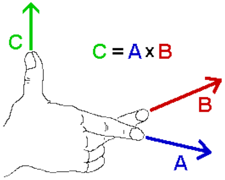
$\vec{A} \times \vec{B} = \vec{C}$

$\vec{C}$ is vector met

- norm $\boxed{|\vec{C}| = |\vec{A}||\vec{B}| \sin\theta}$
  $|\vec{C}|$ = oppervlakte parallellogram $\vec{A}$ en $\vec{B}$
- richting loodrecht op $\vec{A}$ en $\vec{B}$ volgens rechterhandregel

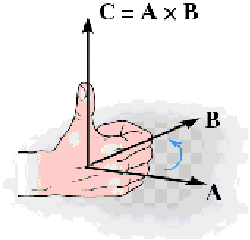


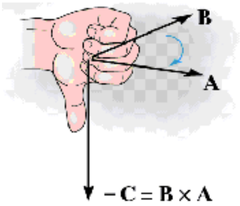




Rekenregels uitproduct (cross product)

- Als $\vec{A} \times \vec{B} = \vec{C}$, dan $\vec{B} \times \vec{A} = -\vec{C} \quad \Rightarrow \quad \vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$



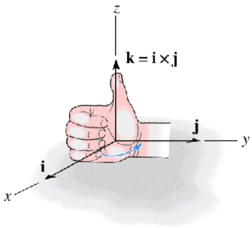


$$|\vec{C}| = |\vec{A}||\vec{B}| \sin\theta$$

- Als $\vec{A} \parallel \vec{B}$, dan $\vec{A} \times \vec{B} = \vec{0} \quad$ (dus $\vec{A} \times \vec{A} = \vec{0}$)
- $\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C}$

Rechtshandig coördinatenstelsel

$$\hat{\imath} \times \hat{\jmath} = \hat{k}$$
$$\hat{\jmath} \times \hat{k} = \hat{\imath}$$
$$\hat{k} \times \hat{\imath} = \hat{\jmath}$$



$$\hat{\jmath} \times \hat{\imath} = -\hat{k}$$
$$\hat{k} \times \hat{\jmath} = -\hat{\imath}$$
$$\hat{\imath} \times \hat{k} = -\hat{\jmath}$$

$$\hat{\imath} \times \hat{\imath} = \vec{0}$$
$$\hat{\jmath} \times \hat{\jmath} = \vec{0}$$
$$\hat{k} \times \hat{k} = \vec{0}$$

Dit wordt gebruikt voor 2e definitie van uitproduct, zie volgende slide.

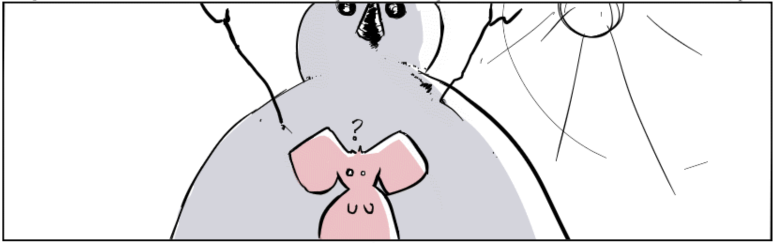
Uitproduct (cross product)

$$
\begin{array}{rllll}
\vec{A} \times \vec{B} = & (A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k}) \times (B_x\hat{\imath} + B_y\hat{\jmath} + B_z\hat{k}) & & \\
\ldots & \hat{\imath}() & +\hat{\jmath}() & +\hat{k}(A_xB_y) \\
\ldots & \hat{\imath}() & +\hat{\jmath}(-A_xB_z) & +\hat{k}(A_xB_y) \\
\ldots & \hat{\imath}() & +\hat{\jmath}(-A_xB_z) & +\hat{k}(A_xB_y - A_yB_x) \\
\ldots & \hat{\imath}(A_yB_z) & +\hat{\jmath}(-A_xB_z) & +\hat{k}(A_xB_y - A_yB_x) \\
\ldots & \hat{\imath}(A_yB_z) & +\hat{\jmath}(-A_xB_z + A_zB_x) & +\hat{k}(A_xB_y - A_yB_x) \\
= & \hat{\imath}(A_yB_z - A_zB_y) & +\hat{\jmath}(-A_xB_z + A_zB_x) & +\hat{k}(A_xB_y - A_yB_x) \\
= & \hat{\imath}(A_yB_z - A_zB_y) & -\hat{\jmath}(A_xB_z - A_zB_x) & +\hat{k}(A_xB_y - A_yB_x)
\end{array}
$$

$$
\boxed{\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}}
$$

Onderste twee rijen verwisselen ($\vec{A} \rightleftharpoons \vec{B}$):
determinant verandert van teken, d.w.z. $\vec{B} \times \vec{A} = -\vec{A} \times \vec{B}$

Bunny bunny.frozenreality.co.uk 13 Apr 06

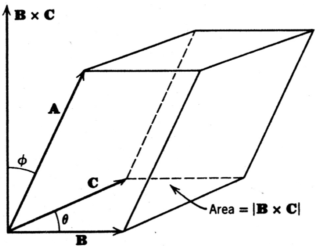


"The Bunny felt a sudden chill"

Triple scalar product (Hoofdstuk 6, sectie 3)

Triple scalar product combinatie van cross en dot product

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$$



- Lengte $\vec{B} \times \vec{C} = |\vec{B}||\vec{C}| \sin\theta$ is oppervlakte grondvlak
- Richting $\vec{B} \times \vec{C}$ is loodrecht op grondvlak
- $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = |\vec{A}||\vec{B} \times \vec{C}| \cos\phi$ $|\vec{A}| \cos\phi$ is "hoogte" van $\vec{A}$ in richting $\vec{B} \times \vec{C}$

$|\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})|$ is volume parallelepipidum, met $|...|$ absolute waarde

Triple scalar product (Hoofdstuk 6, sectie 3)

$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$ kan simpel berekend worden.

$\vec{A} = A_x \hat{\imath} + A_y \hat{\jmath} + A_z \hat{k}$

$$\begin{aligned}\vec{B} \times \vec{C} &= (B_y C_z - B_z C_y)\hat{\imath} - (B_x C_z - B_z C_x)\hat{\jmath} + (B_x C_y - B_y C_x)\hat{k} \\ &= \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}\end{aligned}$$

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

Absolute waarde van determinant van $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ is volume van lichaam opgespannen door de drie vectoren.


"That's
all
folks!"