Lineaire Algebra en Vector Analyse

2. Determinant

Hanneke Paulssen

Universiteit Utrecht

Samenvatting

- Indexnotatie
- Determinant (1×1), (2×2) en (3×3) matrix
- Determinant $(n\times n)$ matrix, Minor, Cofactor
- Rekenregels determinant
- Regel van Cramer

Indexnotatie voor matrices

Indexnotatie is belangrijk voor lineaire algebra.

Voorbeeld

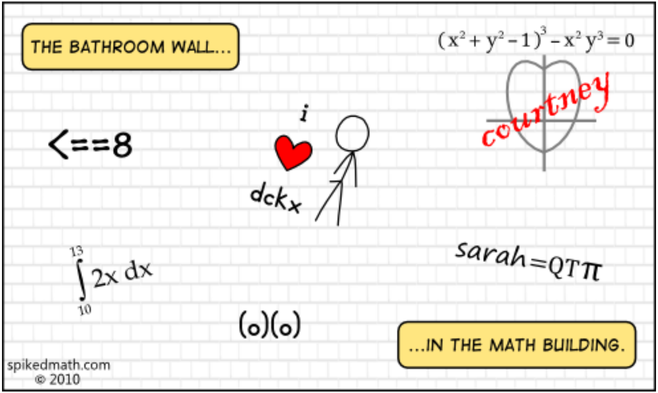
$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & = & a_{14} \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & = & a_{24} \\ a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & + & a_{33}x_3 & = & a_{34} \end{array}$$

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array} \right)$$

A is een (3×4) matrix: 3 rijen en 4 kolommen.
Element a_{23} is element op 2^e rij, 3^e kolom.

Algemeen

a_{ij} is element op i^e rij, j^e kolom.


THE BATHROOM WALL...
$(x^2+y^2-1)^3-x^2y^3=0$
courtney
<==8
i
dck$_x$
$\int_{10}^{13} 2x\,dx$
sarah=QTπ
(o)(o)
...IN THE MATH BUILDING.
spikedmath.com
© 2010

Determinant: (1×1) en (2×2) matrix

Determinant:
Scalar van vierkante $(n \times n)$ matrix
Determinant van A : $\det \mathrm{A}$ of $|\mathrm{A}|$

(1×1) matrix:

$$\mathrm{A} = (a_{11}) \qquad \det \mathrm{A} = a_{11}$$

(2×2) matrix:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad \det \mathrm{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Determinant: (3×3) matrix

(3×3) matrix:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} \boxed{a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13}} \\ a_{21} \quad a_{22} \quad a_{23} \\ a_{31} \quad a_{32} \quad a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$a_{11} \underbrace{\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}_{M_{11}} - a_{12} \underbrace{\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}}_{M_{12}} + a_{13} \underbrace{\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}}_{M_{13}}$$

Determinant: (3×3) matrix

$$\det A = \begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{matrix}} & \begin{matrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{matrix} & \begin{matrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{matrix} \end{vmatrix} =$$

$$a_{11} \underbrace{\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}_{M_{11}} - a_{21} \underbrace{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}_{M_{21}} + a_{31} \underbrace{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}}_{M_{31}}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \boxed{a_{21} \quad a_{22} \quad a_{23}} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$-a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Minor, Cofactor

Minor M_{ij} (onderdeterminant):

Nieuwe determinant door weglating van i^e rij en j^e kolom.

Cofactor C_{ij}:

C_{ij} is M_{ij} vermenigvuldigd met een $+1$ of -1, volgens "schaakbordpatroon".

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \\ + & - & + & - & \\ - & + & - & + & \dots \\ \vdots & & & \vdots & \end{vmatrix}$$

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Determinant: ($n \times n$) matrix

Determinant ($n \times n$) matrix:

Vermenigvuldig elk element van een rij of kolom met z'n cofactor en tel de resultaten op. Herhaal proces tot (2×2) determinanten.

Voorbeeld

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & \boxed{-1} \\ 2 & 4 & \boxed{-8} \\ 3 & -1 & \boxed{-5} \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + 8\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} =$$

-1(-2-12) + 8(-1+3) -5(4+2) = 14 + 16 - 30 = 0

Ga na dat resultaat hetzelfde is als een andere rij of kolom genomen wordt.

Feiten en rekenregels determinant

1. Als elk element van een rij/kolom wordt vermeningvuldigd met een factor k, dan wordt de determinant k keer zo groot.
$\begin{vmatrix} 1k & 2k \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$
2. Als twee rijen/kolommen onderling worden verwisseld, dan verandert de determinant van teken.
$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$
3. Als de rijen kolommen worden (de matrix *transponeert*), dan blijft de determinant hetzelfde.
$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}$
4. Als een veelvoud van een rij/kolom wordt opgeteld bij een andere rij/kolom, dan verandert de determinant niet.
5. Als alle elementen van een rij/kolom 0 zijn, dan is de determinant gelijk aan 0.

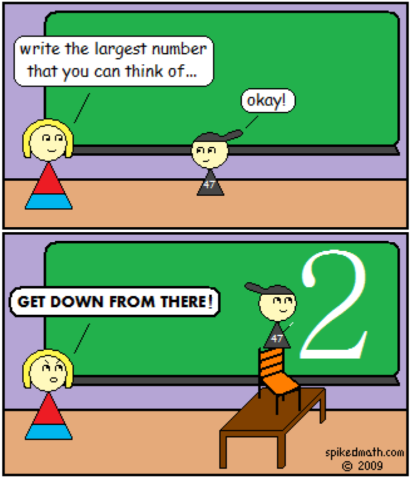
Rekenregels determinant, voorbeeld

Voorbeeld

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{\mathsf{K1'} = \mathsf{K1} - \mathsf{K2}}{=} \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$-1 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{\mathsf{R3'} = \mathsf{R3} - \mathsf{R2}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$-(1) \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(-1-1) = 2$$


write the largest number that you can think of...
okay!
47
GET DOWN FROM THERE!
2
47
spikedmath.com
© 2009

Regel van Cramer

Regel van Cramer

gebruikt determinanten voor oplossen van n vergelijkingen met n onbekenden.

$a_1 x + b_1 y = c_1$
$a_2 x + b_2 y = c_2$

Regel van Cramer

Regel van Cramer

gebruikt determinanten voor oplossen van n vergelijkingen met n onbekenden.

$$\begin{array}{lll} a_1x + b_1y = c_1 & \times b_2 & \\ a_2x + b_2y = c_2 & \times b_1 & - \end{array}$$

Regel van Cramer

Regel van Cramer

gebruikt determinanten voor oplossen van n vergelijkingen met n onbekenden.

$$\begin{array}{ll} a_1x + b_1y = c_1 & \times\, b_2 \\ a_2x + b_2y = c_2 & \times\, b_1 \quad - \end{array}$$

$$(a_1b_2 - a_2b_1)x = b_2c_1 - b_1c_2$$

$$x = \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1} = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

Analoog:

$$y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

Regel van Cramer

$$a_1 x + b_1 y = c_1$$
$$a_2 x + b_2 y = c_2$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{D_x}{D} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{D_y}{D}$$

Noemer, D, is determinant van coefficient matrix:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

Regel van Cramer

$a_1x + b_1y = c_1$
$a_2x + b_2y = c_2$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{D_x}{D} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{D_y}{D}$$

Teller voor x, D_x: D behalve dat de coëfficiënten voor x (a_1 en a_2) worden vervangen door getallen rechts van het $=$ teken (c_1 en c_2).

Teller voor y, D_y: D behalve dat de coëfficiënten voor y (b_1 en b_2) worden vervangen door getallen rechts van het $=$ teken (c_1 en c_2).

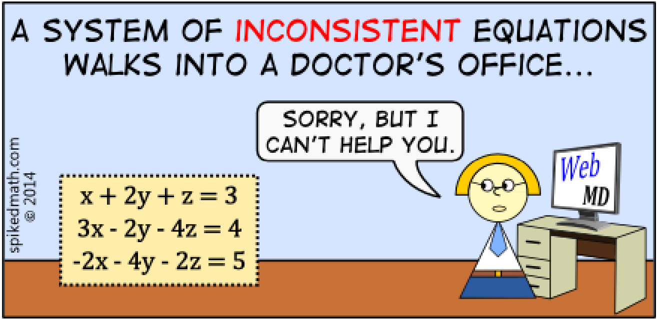
Regel van Cramer

Voorbeeld 3 vergelijkingen 3 onbekenden

$$
\begin{array}{ccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & = & a_{14} \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & = & a_{24} \\
a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & + & a_{33}x_3 & = & a_{34}
\end{array}
$$

$$
x_1 = \frac{D_{x_1}}{D} = \frac{\begin{vmatrix} a_{14} & a_{12} & a_{13} \\ a_{24} & a_{22} & a_{23} \\ a_{34} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}
$$

$x_2 = \ldots$ $\qquad$ $x_3 = \ldots$


A SYSTEM OF INCONSISTENT EQUATIONS WALKS INTO A DOCTOR'S OFFICE...
SORRY, BUT I CAN'T HELP YOU.
$x + 2y + z = 3$
$3x - 2y - 4z = 4$
$-2x - 4y - 2z = 5$
Web MD
spikedmath.com
© 2014

Regel van Cramer: Unieke oplossing

Voorbeeld unieke oplossing

$x + 2y = 2$
$2x + y = 2$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 4 = -3$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 4 = -2 \qquad x = \frac{D_x}{D} = \frac{2}{3}$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 4 = -2 \qquad y = \frac{D_y}{D} = \frac{2}{3}$$

Algemeen

Als $D \neq 0$, dan unieke oplossing.

Regel van Cramer: Geen oplossing

Voorbeeld geen oplossing

$x + y = 1$
x + y = 2

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 1 = 0$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 = -1$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1$$

Algemeen

Als $D = 0$, en $D_x \neq 0$ en/of $D_y \neq 0$, dan inconsistente vergelijkingen, geen oplossing.

Regel van Cramer: Oneindig veel oplossingen

Voorbeeld oneindig veel oplossingen

$$\begin{aligned} x + \ \ y &= 1 \\ 2x + 2y &= 2 \end{aligned}$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \qquad\qquad D_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Algemeen

Als $D = D_x = D_y = 0$, dan *onbepaald* stelsel vergelijkingen (meer onbekenden dan onafhankelijke vergelijkingen), oneindig veel oplossingen.
$\Rightarrow$ Bepaal de oplossing door rijreductie.


That's all for today.
See you again next time.