Lineaire Algebra en Vector Analyse

1. Rijreductie

Hanneke Paulssen

Universiteit Utrecht

Samenvatting

- Rijreductie
- Coëfficiëntenmatrix, aangevulde matrix
- Rang

Simpel voorbeeld 1

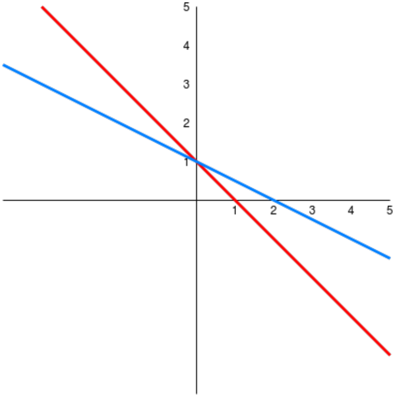
Twee lineaire vergelijkingen met twee onbekenden

- $x + y = 1$
- $x + 2y = 2$

Simpel voorbeeld 1

Twee lineaire vergelijkingen met twee onbekenden

- $x + y = 1$
- $x + 2y = 2$



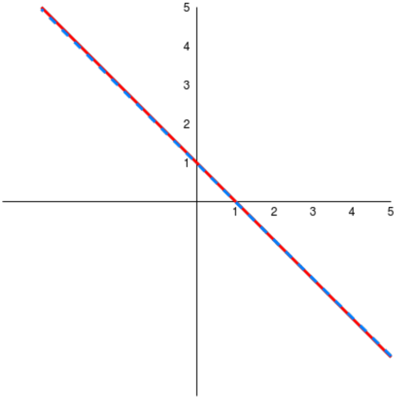
De lijnen snijden elkaar

Simpel voorbeeld 2

- $x + y = 1$
- $2x + 2y = 2$

Simpel voorbeeld 2

- $x + y = 1$
- $2x + 2y = 2$



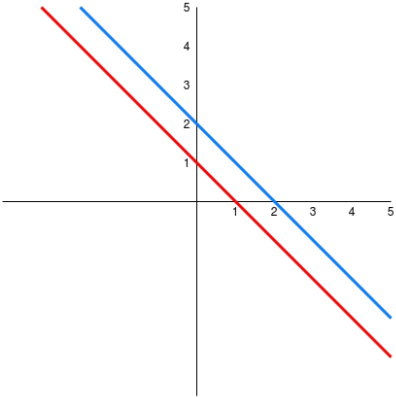
De lijnen overlappen

Simpel voorbeeld 3

- $x + y = 1$
- $x + y = 2$

Simpel voorbeeld 3

- $x + y = 1$
- $x + y = 2$



De lijnen lopen parallel

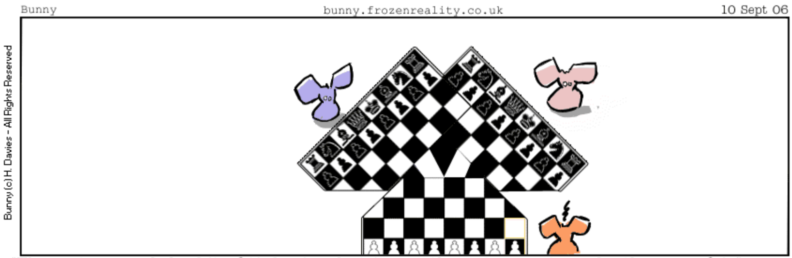
Twee vergelijkingen met twee onbekenden

1. Lijnen snijden elkaar
   - Unieke oplossing
   - Vergelijkingen zijn consistent
2. Lijnen zijn identiek
   - Oneindig veel oplossingen
   - Vergelijkingen zijn consistent
3. Lijnen zijn parallel
   - Geen oplossing
   - Vergelijkingen zijn strijdig (niet consistent)

N vergelijkingen met M onbekenden

N vergelijkingen met M onbekenden hebben

1. een unieke oplossing
2. oneindig veel oplossingen
3. geen oplossing



"The system needed a bit of tinkering, but it was the only way to make the game fair"

Rijreductie / Gaussische eliminatie

Hoe los je een (groot) stelsel van lineaire vergelijkingen *systematisch* op?

Voorbeeld

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & z & = & 0 \\ & & 2y & - & 8z & = & 8 \\ -4x & + & 5y & + & 9z & = & -9 \end{array}$$

Rijreductie / Gaussische eliminatie

Hoe los je een (groot) stelsel van lineaire vergelijkingen *systematisch* op?

Voorbeeld

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & z & = & 0 \\ & & 2y & - & 8z & = & 8 \\ -4x & + & 5y & + & 9z & = & -9 \end{array}$$

Combineer vergelijkingen naar vorm:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & ..y & + & ..z & = & d \\ & & y & + & ..z & = & e \\ & & & & z & = & f \end{array}$$

Rijreductie / Gaussische eliminatie

Hoe los je een (groot) stelsel van lineaire vergelijkingen *systematisch* op?

Voorbeeld

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
x & - & 2y & + & z & = & 0 \\
 & & 2y & - & 8z & = & 8 \\
-4x & + & 5y & + & 9z & = & -9
\end{array}
$$

Combineer vergelijkingen naar vorm:

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
x & + & ..y & + & ..z & = & d \\
 & & y & + & ..z & = & e \\
 & & & & z & = & f
\end{array}
$$

of

$$
\begin{array}{ccccc}
x & & & = & a \\
 & y & & = & b \\
 & & z & = & c
\end{array}
$$

Rijreductie: Aanpak

Stap 1: Schrijf vergelijkingen in *matrix notatie*

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & z & = & 0 \\ & & 2y & - & 8z & = & 8 \\ -4x & + & 5y & + & 9z & = & -9 \end{array}$$

wordt

$$\left(\begin{array}{rrrcr} 1 & -2 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 2 & -8 & \vdots & 8 \\ -4 & 5 & 9 & \vdots & -9 \end{array}\right)$$

Rijreductie: Aanpak

Stap 2: Pas *rijreductie* toe zodat matrix omgeschreven wordt in *echelon vorm* (trapvorm) met de coëfficiënt 1 op elk van de *pivots* ("traptreden")

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & .. & .. & d \\ 0 & 1 & .. & e \\ 0 & 0 & 1 & f \end{array}\right)$$

Rijreductie: Aanpak

Stap 2: Pas *rijreductie* toe zodat matrix omgeschreven wordt in *echelon vorm* (trapvorm) met de coëfficiënt 1 op elk van de *pivots* ("traptreden")

$$\begin{pmatrix} 1 & .. & .. & \vdots & d \\ 0 & 1 & .. & \vdots & e \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & f \end{pmatrix}$$

of in *gereduceerde echelon vorm*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & a \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & b \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & c \end{pmatrix}$$

Rijreductie: Aanpak

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ -4 & 5 & 9 & -9 \end{array}\right)$$

Begin met de bovenste rij en werk naar beneden.

- De eerste rij heeft al een pivot van 1 in de eerste kolom, dus de eerste pivot is OK.

Rijreductie: Aanpak

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ -4 & 5 & 9 & -9 \end{array}\right)$$

Begin met de bovenste rij en werk naar beneden.

- De eerste rij heeft al een pivot van 1 in de eerste kolom, dus de eerste pivot is OK.
- Gebruik deze rij om de coëfficiënten onder deze pivot 0 te maken: "Ga met deze rij vegen"

Rijreductie: Aanpak

$$\left(\begin{array}{rrr:r} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ -4 & 5 & 9 & -9 \end{array}\right)$$

Begin met de bovenste rij en werk naar beneden.

- De eerste rij heeft al een pivot van 1 in de eerste kolom, dus de eerste pivot is OK.
- Gebruik deze rij om de coëfficiënten onder deze pivot 0 te maken: "Ga met deze rij vegen"
- 2e rij heeft al 0 in de eerste kolom: OK

Rijreductie: Aanpak

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ -4 & 5 & 9 & -9 \end{array}\right)$$

Begin met de bovenste rij en werk naar beneden.

- De eerste rij heeft al een pivot van 1 in de eerste kolom, dus de eerste pivot is OK.
- Gebruik deze rij om de coëfficiënten onder deze pivot 0 te maken: "Ga met deze rij vegen"
- 2e rij heeft al 0 in de eerste kolom: OK
- 3e rij: rij 3 + 4 x rij 1 wordt nieuwe rij 3:
  R3' = R3 + 4R1

Rijreductie: Aanpak

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ -4 & 5 & 9 & -9 \end{array}\right) \overset{R3' = R3 + 4R1}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ 0 & -3 & 13 & -9 \end{array}\right)$$

Rijreductie: Aanpak

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ -4 & 5 & 9 & -9 \end{array}\right) \overset{\mathrm{R3}' = \mathrm{R3} + 4\mathrm{R1}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ 0 & -3 & 13 & -9 \end{array}\right)$$

Maak pivot op rij 2 gelijk aan 1:

Rijreductie: Aanpak

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ -4 & 5 & 9 & -9 \end{array}\right) \xrightarrow{R3' = R3 + 4R1} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ 0 & -3 & 13 & -9 \end{array}\right)$$

Maak pivot op rij 2 gelijk aan 1:

$$\xrightarrow{R2' = R2/2} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & -3 & 13 & -9 \end{array}\right)$$

Rijreductie: Aanpak

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ -4 & 5 & 9 & -9 \end{array}\right) \overset{R3' = R3 + 4R1}{\rightarrow} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ 0 & -3 & 13 & -9 \end{array}\right)$$

Maak pivot op rij 2 gelijk aan 1:

$$\overset{R2' = R2/2}{\rightarrow} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & -3 & 13 & -9 \end{array}\right)$$

Maak coëfficiënt onder 2e pivot gelijk aan 0. Ga met rij 2 vegen:

Rijreductie: Aanpak

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ -4 & 5 & 9 & -9 \end{array}\right) \overset{R3' = R3 + 4R1}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ 0 & -3 & 13 & -9 \end{array}\right)$$

Maak pivot op rij 2 gelijk aan 1:

$$\overset{R2' = R2/2}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & -3 & 13 & -9 \end{array}\right)$$

Maak coëfficiënt onder 2e pivot gelijk aan 0. Ga met rij 2 vegen:

$$\overset{R3' = R3 + 3R2}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Rijreductie: Aanpak

Stap 3: Terugsubstitutie

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

geeft

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & z & = & 0 \\ & & y & - & 4z & = & 4 \\ & & & & z & = & 3 \end{array}$$

R3: $z = 3$
R2: $y - 4.3 = 4 \rightarrow y = 16$
R1: $x - 2.16 + 1.3 = 0 \rightarrow x = 29$

Rijreductie: Aanpak

Toegestaan bij rijreductie:

- Rijen onderling verwisselen
- Rijen met een constante ($\neq 0$) vermenigvuldigen
- Een veelvoud van een rij bij een andere optellen

Rijreductie: Aanpak

Toegestaan bij rijreductie:

- Rijen onderling verwisselen
- Rijen met een constante ($\neq 0$) vermenigvuldigen
- Een veelvoud van een rij bij een andere optellen

Aanpak:

1. Verwissel of combineer rijen om een pivot van 1 op de eerste rij te krijgen.
2. Gebruik de pivot om alle coëfficiënten eronder 0 te maken: "Ga met deze rij vegen". (Gebruik deze rij hierna niet meer.)
3. Terug naar 1, maar nu voor tweede rij.

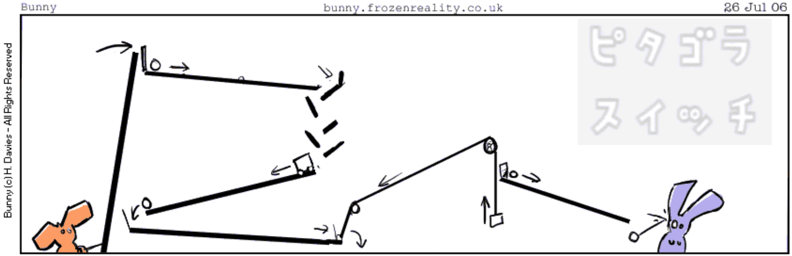
   Ga zo verder tot onderste rij.
4. Los op via terugsubstitutie.

Rijreductie: Aanpak

Eventueel verder vereenvoudigen tot gereduceerde echelon vorm. Maak dan de coëfficiënten boven de pivots 0, en begin met de onderste rij en werk naar boven.

Ons voorbeeld wordt dan

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 29 \\ 0 & 1 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$



"The setup time was definatly worth it"

Rijreductie voor inconsistente vergelijkingen

Voorbeeld

$$\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 1 \\ x & + & y & = & 2 \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc:c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

Coëfficiëntenmatrix (coefficient matrix):

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Aangevulde matrix (augmented matrix):

$$\left(\begin{array}{cc:c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

Rijreductie voor inconsistente vergelijkingen

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathsf{R2}' = \mathsf{R2} - \mathsf{R1}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Rijreductie voor inconsistente vergelijkingen

$$\left(\begin{array}{cc:c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \overset{\mathrm{R2}' = \mathrm{R2} - \mathrm{R1}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cc:c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

2e rij: $0.x + 0.y = 1$ Kan niet. Vergelijkingen zijn inconsistent.

Algemeen

Vergelijkingen zijn inconsistent als de coëfficiëntenmatrix een rij met nullen heeft (na rijreductie) en de aangevulde matrix op die rij geen 0 heeft aan de rechterhand.

Rijreductie voor inconsistente vergelijkingen

Rang (Rank):

Aantal rijen dat niet geheel uit nullen bestaat na rijreductie

$$\left(\begin{array}{cc:c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Rang coëfficientenmatrix is

Rijreductie voor inconsistente vergelijkingen

Rang (Rank):

Aantal rijen dat niet geheel uit nullen bestaat na rijreductie

$$\left(\begin{array}{cc:c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Rang coëfficientenmatrix is 1.
Rang aangevulde matrix is

Rijreductie voor inconsistente vergelijkingen

Rang (Rank):

Aantal rijen dat niet geheel uit nullen bestaat na rijreductie

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Rang coëfficientenmatrix is 1.
Rang aangevulde matrix is 2.

Algemeen

Als rang coëfficiëntenmatrix $<$ rang aangevulde matrix, dan zijn de vergelijkingen inconsistent.

Rijreductie voor vergelijkingen met meer oplossingen

Voorbeeld

$$\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 1 \\ 2x & + & 2y & = & 2 \end{array}$$

Rijreductie voor vergelijkingen met meer oplossingen

Voorbeeld

$$\begin{array}{rcrcl} x & + & y & = & 1 \\ 2x & + & 2y & = & 2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{array}\right) \overset{\mathrm{R2}' = \mathrm{R2} - 2\mathrm{R1}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Slechts 1 onafhankelijke vergelijking na rijreductie

Rijreductie voor vergelijkingen met meer oplossingen

Voorbeeld

$$\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 1 \\ 2x & + & 2y & = & 2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{R2}' = \mathrm{R2} - 2\mathrm{R1}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Slechts 1 onafhankelijke vergelijking na rijreductie

Algemeen

Als rang coëfficiëntenmatrix = rang aangevulde matrix = R,
dan zijn er R onafhankelijke vergelijkingen.

Rijreductie voor vergelijkingen met meer oplossingen

Algemeen

Met n onbekenden en $n > R$ (meer onbekenden dan onafhankelijke vergelijkingen) zijn er oneindig veel oplossingen.
Oplossing wordt gegeven door R onbekenden uit te drukken in de overige $n - R$ onbekenden.

Voor het voorbeeld met $x + y = 1$:
$x = 1 - y \quad$ (of $\quad y = x - 1$)

Voorbeeld van twee vergelijkingen met 3 onbekenden waarbij x en y worden uitgedrukt in z:
$x = 1 - z$
$y = 2 - z$

Rijreductie voor vergelijkingen met een unieke oplossing

Voorbeeld

$$\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 1 \\ x & + & 2y & = & 2 \end{array}$$

Rijreductie voor vergelijkingen met een unieke oplossing

Voorbeeld

$$\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 1 \\ x & + & 2y & = & 2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{R2' = R2 - R1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R1' = R1 - R2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 1 \end{array}$$

Rijreductie voor vergelijkingen met een unieke oplossing

Voorbeeld

$$\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 1 \\ x & + & 2y & = & 2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cc:c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{array}\right) \overset{R2' = R2 - R1}{\rightarrow} \left(\begin{array}{cc:c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{R1' = R1 - R2}{\rightarrow} \left(\begin{array}{cc:c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 1 \end{array}$$

Algemeen

Als rang coëffiëntenmatrix = rang aangevulde matrix = aantal onbekenden, dan unieke oplossing.


THAT'S
ALL WE
NEED FOR
TODAY...